

Électromagnétisme

John Martin

I.P.N.A.S., bât. B15

Tél.: 04/366 28 64

email: jmartin@ulg.ac.be

2015–2016

Table des matières I

- Ligne du temps
- La charge électrique
- Loi de Coulomb
- Densité de charge
- Champ électrostatique et loi de Gauss
- Potentiel électrique
- Équation de Poisson
- Électrostatique
- Énergie potentielle d'un dipôle électrique
- Discontinuités du champ électrique
- Conducteurs
- Milieux diélectriques
- Champ magnétique
- Loi de Biot et Savart
- Potentiel vecteur
- Loi d'Ampère
- Magnétostatique
- Électrostatique – magnétostatique
- Dipôle magnétique

Table des matières II

- Discontinuités du champ magnétique
- Énergie potentielle d'un dipôle magnétique
- Milieux magnétiques
- Retour sur la loi de Gauss
- Loi d'induction de Faraday
- Inductance
- Énergie magnétique
- Loi d'Ampère-Maxwell
- Équations de Maxwell
- Moments dipolaires
- Potentiels électromagnétiques
- Invariance de jauge
- Ondes électromagnétiques
- Polarisation
- Spectre électromagnétique
- Potentiels retardés
- Théorème de Poynting
- Champs radiatifs
- Formule de Larmor

Table des matières III

- Champs créés par une charge ponctuelle en MRU
- Bremsstrahlung et rayonnement synchrotron
- Modes d'une cavité électromagnétique
- Maxima et minima d'intensité
- Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique
- Formulation lagrangienne
- Formulation hamiltonienne

Livre de référence :

- Introduction to electrodynamics, D. J. Griffiths, Prentice Hall

Lectures avancées :

- The Feynman Lectures on Physics, R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, Addison-Wesley
- Classical Electrodynamics, J. D. Jackson, John Wiley & Sons
- Théorie des champs, L. Landau & E. Lifchitz, ellipses
- Electricity and magnetism, E. M. Purcell, Berkeley Physics Course

Organisation du cours :

- 25 h théorie, 15 h / 20 h exercices
- Cours les lundis et mardis de 13h30 à 15h30 au S.30 (B5b) et R.52 (B4)
- Transparents disponibles (voir engagements pédagogiques)
- Examen écrit (théorie – 65 %, exercices – 35 %) en juin et en septembre
- Dispense partielle à partir de 12/20 (d'une session à l'autre mais pas d'une année à l'autre)

Le Système International des unités (SI)

Toutes les unités physiques peuvent s'exprimer à partir des unités de bases suivantes : le mètre (m), le kilogramme (kg), la seconde (s), l'ampère (A), le kelvin (K), la mole (mol) et le candela (cd).

Grandeur	symbole	unité
Longueur	L, l, ℓ	m
Masse	m, M	kg
Temps	t	s
Force	F	$\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Travail	W	$\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Puissance	P	$\text{W} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$
Charge	Q, q	$\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$
Densité de charge	ρ	$\text{C} \cdot \text{m}^{-3} = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$
Courant	I	$\text{A} (= \text{C} \cdot \text{s}^{-1})$
Densité de courant	j	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$
Champ électrique	E	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1} = \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}$
Potentiel électrique	V	$\text{V} = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}$
Polarisation	P	$\text{C} \cdot \text{m}^{-2} = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$
Déplacement électrique	D	$\text{C} \cdot \text{m}^{-2} = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$
Capacité électrique	C	$\text{F} = \text{C} \cdot \text{V}^{-1} = \text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
Flux magnétique	Φ	$\text{Wb} = \text{V} \cdot \text{s} = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$
Induction magnétique	B	$\text{T} = \text{Wb} \cdot \text{m}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$
Magnétisation	M	$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$
Inductance	L	$\text{H} = \text{Wb} \cdot \text{A}^{-1} = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$

Quelques constantes fondamentales

Grandeur	symbole	valeur	statut
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$	exact
Perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V.s.A}^{-1}.\text{m}^{-1}$	exact
Permittivité du vide	ϵ_0	$8.854187817... \cdot 10^{-12} \text{ A.s.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$\frac{1}{c^2 \mu_0}$, exact
Charge de l'électron	e	$1.602176462(63) \cdot 10^{-19} \text{ C}$	
Masse de l'électron au repos	m_e	$9.10938188(72) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	
Rapport $\frac{\text{masse proton}}{\text{masse électron}}$	m_p/m_e	1836.152668(39)	
Nombre d'Avogadro	N_A	$6.02214199(47) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	
Constante de Faraday	F	$96485.3415(39) \text{ C.mol}^{-1}$	$N_A e$
Rayon classique de l'électron	r_e	$2.817940325(28) \cdot 10^{-15} \text{ m}$	$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.3806503(24) \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$	
Constante de Planck	h	$6.62606876(52) \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$	
Rayon de Bohr	a_0	$0.5291772083(19) \cdot 10^{-10} \text{ m}$	$\frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}$

Remarques : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ A}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{V.m}$

$$c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Notations. Vecteurs

Vecteur : entité mathématique définie par une *norme*, une *direction* et un *sens*, et qui obéit aux règles de l'algèbre vectoriel.

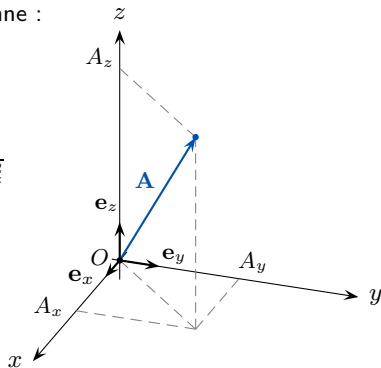
- Décomposition sur une base cartésienne :

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$$

- Expression en terme de composantes cartésiennes : $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$

- Norme : $|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

- Vecteur unitaire de mêmes direction et sens que $\mathbf{A}$: $\mathbf{e}_A = \mathbf{A}/A$



Produit scalaire

Produit scalaire entre deux vecteurs : scalaire

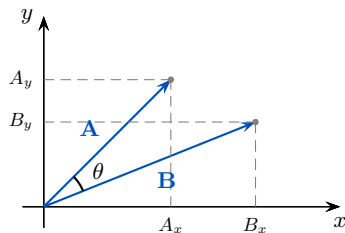
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

- $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i$

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$



Produit vectoriel

Le produit vectoriel $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ est un vecteur axial de norme

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta$$

égale à l'aire du parallélogramme engendré par $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, orthogonal à $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ et dont le sens est donné par la règle de la main droite. En terme de composantes, nous avons

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z$$

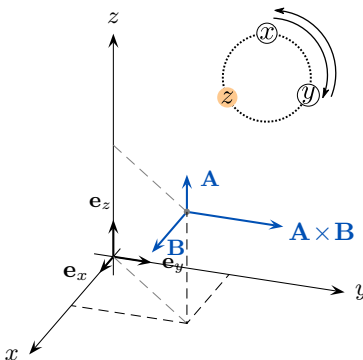
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$$

Propriétés

- $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{A}, \mathbf{B}$

- $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

- $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$



Produit vectoriel (suite)

Les composantes du produit vectoriel $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ peuvent s'écrire sous la forme compacte

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ ou } (2, 3, 1), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{sinon } (i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i) \end{cases}$$

Identities utiles

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}, \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$$

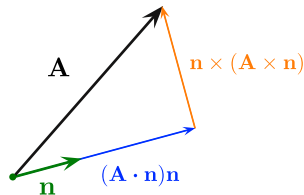
Produits mixtes

Soit des vecteurs $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$. On définit les produits suivants :

- Triple produit vectoriel : $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
- Produit mixte : $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$
 $=$ volume du parallélépipède engendré par $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$

Le triple produit vectoriel est utilisé dans la décomposition d'un vecteur quelconque $\mathbf{A}$ dans la direction d'un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ et sa direction orthogonale

$$\mathbf{A} = \underbrace{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}}_{\parallel \mathbf{n}} + \underbrace{\mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})}_{\perp \mathbf{n}}$$



Scalaire. Vecteurs polaires et axiaux ($\in \mathbb{R}^3$)

Scalaire :

Si une formule pour déterminer un nombre dans un système de coordonnées donne le même nombre dans tout autre système de coordonnées relié par une *rotation* et/ou une *réflexion*, alors le nombre définit un *scalaire*. Si le nombre change de signe sous l'effet d'une réflexion, il définit un *pseudoscalaire*.

Ex. : Le produit scalaire entre deux vecteurs est un scalaire.

La norme d'un vecteur est un scalaire.

Le produit mixte $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ est un pseudoscalaire.

Vecteurs polaire et axial :

Si une formule pour déterminer un triplet de nombre $(A_x, A_y, A_z) \equiv \mathbf{A}$ dans un système de coordonnées donne le triplet opposé $(-A_x, -A_y, -A_z) \equiv -\mathbf{A}$ sous l'effet d'une inversion pure ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$), alors le triplet définit un *vecteur polaire*. Si le triplet ne change pas de signe, il définit un *vecteur axial*.

Ex. : Les vecteurs position, vitesse et accélération sont des vecteurs polaires.

Le vecteur moment cinétique ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$) est un vecteur axial.

Vecteurs et dérivées

- Dérivée d'un vecteur dépendant d'une seule variable t

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{dA_x(t)}{dt}, \frac{dA_y(t)}{dt}, \frac{dA_z(t)}{dt} \right)$$

- Dérivée d'un produit de vecteurs

$$\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

Dérivées partielles

- Dérivée partielle d'un champ de vecteurs (par rapport à x)

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}(x, y, z)}{\partial x} \right)_{y, z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta x}$$

- Il est d'usage d'écrire la dérivée partielle $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$ ou $\partial_x \mathbf{A}$ en se souvenant que les coordonnées y et z sont maintenues constantes (idem pour les autres dérivées partielles).

- Dérivée d'un champ scalaire dans la direction d'un vecteur unitaire $\mathbf{n}$

$$\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial n} \equiv \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{V(\mathbf{r} + \Delta n \mathbf{n}) - V(\mathbf{r})}{\Delta n} = \nabla V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$$

- Théorème d'interversion des dérivées

$$\frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V(\mathbf{r})}{\partial y \partial x} \quad \forall V(\mathbf{r}) \text{ au min. deux fois dérivable}$$

Gradient (d'un champ scalaire)

Soit f un champ scalaire, c'est-à-dire une fonction qui à tout point $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ de l'espace associe le nombre $f(x, y, z)$.

Le gradient du champ scalaire f est le champ vectoriel

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

qui s'obtient par l'application de l'opérateur nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

au champ scalaire f . Les composantes de ∇f se transforment comme celles d'un vecteur lors d'un changement de base.

Cas d'une rotation d'un angle θ autour de l'axe z (sens trigonométrique) :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \partial_{x'} f = \partial_x f \cos \theta + \partial_y f \sin \theta \\ \partial_{y'} f = -\partial_x f \sin \theta + \partial_y f \cos \theta \end{cases}$$

Gradient (d'un champ scalaire)

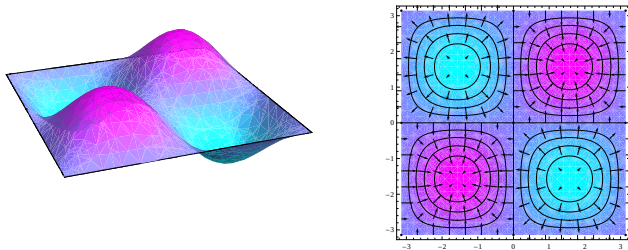


Figure. Surface $f(x, y) = \sin x \sin y$ et champ vectoriel ∇f .

Considérons deux points voisins $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. La variation du champ scalaire f entre ces deux points est donnée en bonne approximation par

$$df \equiv f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \simeq \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

Le gradient de f possède la direction de la pente la plus forte et pointe vers les valeurs croissantes de f . Le gradient est perpendiculaire aux équipotentiels (surfaces $f(x, y, z) = \text{constante}$).

Développement en série de Taylor

Développement en série de Taylor d'un champ scalaire dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad f(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}_0) + \sum_{r_i=x,y,z} \left. \frac{\partial f}{\partial r_i} \right|_{\mathbf{r}_0} dr_i + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{r_i=x,y,z \\ r_j=x,y,z}} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_j} \right|_{\mathbf{r}_0} dr_i dr_j + \dots \\
 &= f(\mathbf{r}_0) + \nabla f|_{\mathbf{r}_0} \cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{2!} d\mathbf{r} \cdot \left(H|_{\mathbf{r}_0} d\mathbf{r} \right) + \dots
 \end{aligned}$$

où H est la matrice Hessienne de composantes $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_j}$.

$$\bullet \quad f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \nabla f|_{\mathbf{r}_0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{1}{2!} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \left(H|_{\mathbf{r}_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \right) + \dots$$

• Translation dans $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = e^{-\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}}} f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) - \mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) + \frac{(\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}})^2}{2!} f(\mathbf{r}) + \dots$$

Exemple. Développement en série de $f(\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$ aux alentours de $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[3 \frac{r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right] r'_i r'_j + \dots}$$

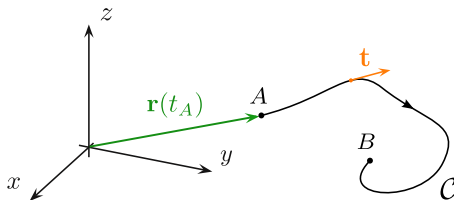
Intégrales curvilignes

Une courbe $\mathcal{C}$ est paramétrée par un chemin $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

L'intégrale curviligne (ou circulation) d'un champ vectoriel $\mathbf{A}$ le long d'une courbe orientée $\mathcal{C} = \{\mathbf{r}(t) : t \in [t_A, t_B]\}$ est notée

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad \text{et est par définition égale à} \quad \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

Le vecteur tangent unitaire à la courbe orientée est donné par $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$.



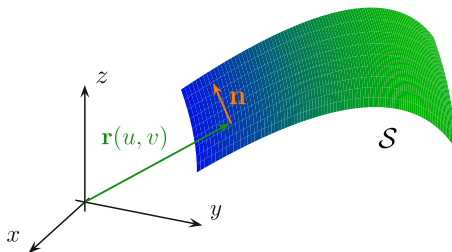
Intégrales superficielles

Une surface $\mathcal{S}$ est paramétrée par une couverture $(\mathbf{r}(u, v), K)$ où $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ et $(u, v) \in K = [u_{\min}, u_{\max}] \times [v_{\min}, v_{\max}]$.

L'intégrale superficielle (ou flux) d'un champ vectoriel $\mathbf{A}$ sur (au travers de) la surface orientée $\mathcal{S}$ est notée

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{et est } \underline{\text{par définition}} \text{ égale à } \iint_K \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}) du dv$$

La normale unitaire à la surface orientée est donnée par $\mathbf{n} = \frac{\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}}{|\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}|}$.

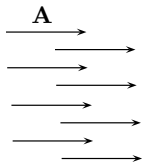


Flux d'un champ vectoriel

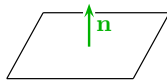
Le flux d'un champ vectoriel $\mathbf{A}$ au travers d'une surface S de normale extérieure $\mathbf{n}$ est défini par

$$\Phi_{\mathbf{A}} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

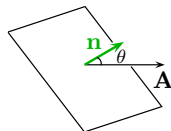
Exemple. Si $\mathbf{A}$ représente le champ de vitesse (homogène et stationnaire) dans l'eau d'une rivière mesuré en m.s^{-1} , et si S est la surface d'orientation $\mathbf{n}$, exprimée en mètres carrés, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} S$ est le débit de l'eau à travers le cadre mesuré en mètres cubes par seconde.



$$\Phi_{\mathbf{A}} = AS$$



$$\Phi_{\mathbf{A}} = 0$$



$$\Phi_{\mathbf{A}} = AS \cos \theta$$

Divergence (d'un champ vectoriel)

Soit $\mathbf{v}$ un champ vectoriel, c'est-à-dire une fonction qui à tout point de l'espace associe le vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$.

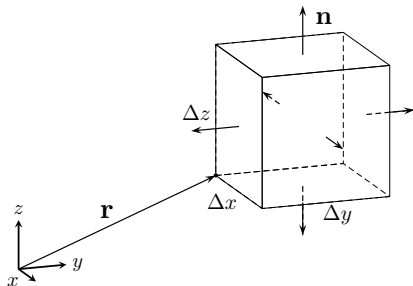
La divergence du champ vectoriel $\mathbf{v}$ est un champ scalaire dont la valeur en tout point est donnée par la limite (indépendante du choix d'un système de coordonnées)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \text{flux local par unité de volume}$$

ayant pour expression en coordonnées cartésiennes

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \equiv \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Le flux au travers de l'élément de volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ vaut par définition $\Delta V \operatorname{div} \mathbf{v}$ (pour $\Delta V \rightarrow 0$).

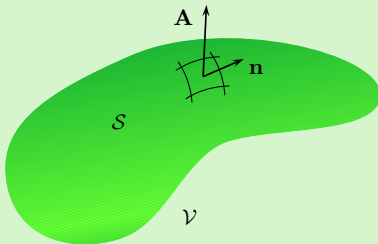


Théorèmes de Gauss et de Stokes

Formule de Gauss (du flux ou d'Ostrogradsky)

Pour tout volume donné $\mathcal{V}$ dont la frontière est une surface $\mathcal{S}$ régulière, c'est-à-dire admettant une normale extérieure $\mathbf{n}$ presque partout, on a

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \quad (\text{Gauss})$$



Rotationnel (d'un champ vectoriel)

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\mathbf{v}$ est un champ (pseudo)vectoriel défini en tout point de l'espace par la limite (indépendante du choix d'un système de coordonnées)

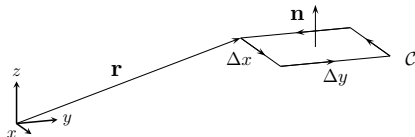
$$(\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \text{circulation locale par unité de surface}$$

ayant pour expression en coordonnées cartésiennes

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \equiv \nabla \times \mathbf{v}$$

La circulation le long de la boucle C d'aire $\Delta S = \Delta x \Delta y$ vaut par définition $\Delta S (\text{rot } \mathbf{v})_z$ (pour $\Delta S \rightarrow 0$).

Les trois composantes $(\text{rot } \mathbf{v})_x$, $(\text{rot } \mathbf{v})_y$, $(\text{rot } \mathbf{v})_z$ forment un vecteur.



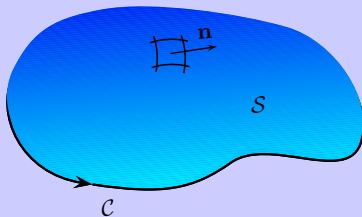
Théorèmes de Gauss et de Stokes

Formule de Stokes(-Ampère)

Pourvu que $\mathbf{A}$ et $\nabla \times \mathbf{A}$ soient continus dans un domaine contenant la surface S ouverte, limitée par le contour $\mathcal{C}$, on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{Stokes})$$

avec les règles de signes habituelles concernant $\mathbf{n}$ et le sens de parcours de $\mathcal{C}$.



Laplacien

Le laplacien du champ scalaire f est le champ scalaire

$$\Delta f \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot \nabla f$$

ayant pour expression en coordonnées cartésiennes

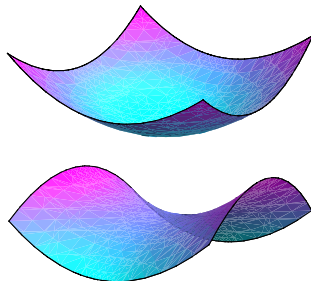
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

On utilise aussi la notation $\nabla^2 f$.

Pour le champ scalaire à deux dimensions $f(x, y) = a(x^2 + y^2)$, on a $\Delta f = 4a$.

Laplacien = $\sum$ dérivées secondes
 $\sim \sum$ courbures
 $\sim$ courbure moyenne

$$g(x, y) = a(x^2 - y^2) \Rightarrow \Delta g = 0.$$



Formulaire de calcul vectoriel

Soit V , W des champs scalaires et $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ des champs vectoriels qui dépendent des coordonnées $\mathbf{r}$ et éventuellement du temps t .

- $\nabla \times \nabla V = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
- $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$
- $\nabla \times (V\mathbf{A}) = V \nabla \times \mathbf{A} + \nabla V \times \mathbf{A}$
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
- $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$
- $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$
 où $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} = ((\mathbf{A} \cdot \nabla)B_x, (\mathbf{A} \cdot \nabla)B_y, (\mathbf{A} \cdot \nabla)B_z)$
- $\Delta(VW) = (\Delta V)W + 2\nabla V \cdot \nabla W + V(\Delta W)$

Formules utiles

Les relations suivantes sont valables $\forall \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ \bullet \quad \nabla_{\mathbf{r}} \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) &= \mathbf{0}, \quad \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$:

$$\bullet \quad \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mathbf{p}}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r}, \quad \nabla_{\mathbf{r}} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p} \right) = -\frac{\mathbf{p}}{r} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \mathbf{r}$$

Dériver "à la Feynman"

$$f(\mathbf{r}) = C (u(\mathbf{r}))^\alpha (v(\mathbf{r}))^\beta (w(\mathbf{r}))^\gamma \dots \quad C, \alpha, \beta, \gamma : \text{constantes}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \left[\alpha \frac{\nabla u}{u} + \beta \frac{\nabla v}{v} + \gamma \frac{\nabla w}{w} + \dots \right]$$

Quelques rappels de calcul intégral

Quelques primitives à connaître...

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh}(x)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2}$$

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Changement de variable régulier $x = x(y)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a'}^{b'} f(x(y)) \frac{dx}{dy}(y) dy$$

avec $a' = \lim_{x \rightarrow a} y(x)$ et $b' = \lim_{x \rightarrow b} y(x)$.

Remarques : • Toutes les primitives sont définies à une constante additive près.

• $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Changement de variable et opérateur de dérivation

Soit $\mathbf{r}(\mathbf{r}')$ un changement de variable dans $\mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{pmatrix} \partial_{r_1} \\ \partial_{r_2} \\ \vdots \\ \partial_{r_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right)^{\sim, -1} \begin{pmatrix} \partial_{r'_1} \\ \partial_{r'_2} \\ \vdots \\ \partial_{r'_n} \end{pmatrix}$$

où $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right)$ est la matrice jacobienne du changement de variable

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right)_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial r'_j}, \quad \text{jacobien} = \det \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right)$$

Exemple I : changement de variable linéaire dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \partial_{r_1} \\ \partial_{r_2} \\ \partial_{r_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{r'_1} \\ \partial_{r'_2} \\ \partial_{r'_3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}'} = \nabla_{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}$$

Changement de variable et opérateur de dérivation

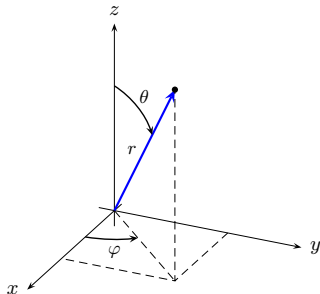
Exemple II : coordonnées sphériques [$\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$, $\mathbf{r}' \equiv (r, \theta, \varphi)$]

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}') = \begin{pmatrix} x(r, \theta, \varphi) \\ y(r, \theta, \varphi) \\ z(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right) \right| = r^2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \\ \sin \theta \sin \varphi & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \\ \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \\ \partial_\varphi \end{pmatrix}$$

Coordonnées sphériques



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \left(\sqrt{x^2 + y^2} / z \right) \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{cases}$$

$$r \in]0, +\infty[, \theta \in]0, \pi[, \varphi \in]0, 2\pi[$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{+\infty} dr r^2 f(r, \theta, \varphi)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

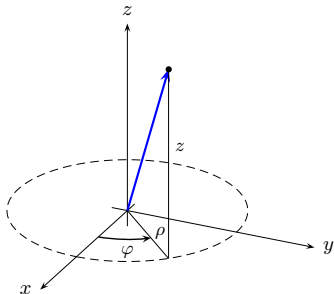
$$dV = (r \sin \theta d\varphi)(r d\theta) dr, \quad dS = (r \sin \theta d\varphi)(r d\theta)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Coordonnées cylindriques



$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho \in]0, +\infty[, \varphi \in]0, 2\pi[, z \in]-\infty, \infty[$$

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} d\rho \rho \int_{-\infty}^{+\infty} dz f(\rho, \varphi, z)$$

$$dV = (\rho d\varphi) d\rho dz, \quad dS = (\rho d\varphi) dz$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Champs transverses et longitudinaux

Définitions. Un champ vectoriel est dit *transverse* (ou *indivergentiel*) si sa divergence est nulle en tout point de l'espace. Un champ vectoriel est dit *longitudinal* (ou *irrotationnel*) si son rotationnel est nul en tout point de l'espace.

Théorème (champ transverse)

Un champ vectoriel $\mathbf{B}$ est transverse ssi il dérive d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ est défini à un gradient d'un champ scalaire ($\nabla\phi$) près.

Théorème (champ longitudinal)

Un champ vectoriel $\mathbf{E}$ est longitudinal ssi il dérive d'un potentiel scalaire V .

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = (-)\nabla V$$

Le potentiel scalaire V est défini à une constante additive (C) près.

Remarque : Nous supposons tous les champs deux fois continûment dérivables afin que le théorème d'interversion des dérivées soit d'application.

Champs transverses et longitudinaux

Théorème (Helmholtz)

Tout champ vectoriel $\mathbf{A}$ qui décroît plus vite que $1/r$ à grande distance (cas des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ statiques) peut se décomposer en une composante longitudinale $\mathbf{A}_{\parallel}$ définie univoquement par sa divergence et une composante transverse $\mathbf{A}_{\perp}$ définie univoquement par son rotationnel.

Plus précisément,

$$\mathbf{A} = \underbrace{-\nabla U}_{\mathbf{A}_{\parallel}} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{W}}_{\mathbf{A}_{\perp}}$$

avec

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{A})(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

et

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{(\nabla \times \mathbf{A})(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Exemples de champs vectoriels

(a) Champ homogène $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$

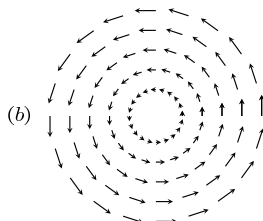
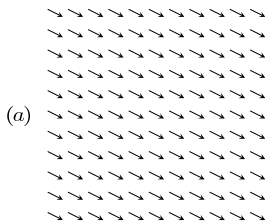
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{r}}{2} + \nabla \phi$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \mathbf{A} = \nabla \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + C$$

(b) Champ tournant $\mathbf{A} = \omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = \omega(-y, x, 0) = \omega r \mathbf{e}_\varphi$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = \omega z (x, y, 0) + \nabla \phi$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = 2\omega \mathbf{e}_z$$



Exemples de champs vectoriels

(c) Champ radial $\mathbf{A} = (x, y, z) = \mathbf{r}$

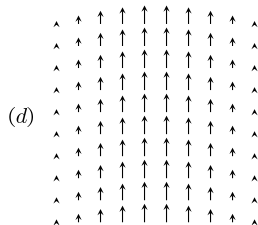
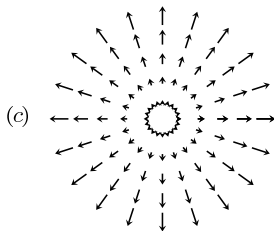
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 3$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = r^2/2 + C$$

(d) Champ rotationnel $\mathbf{A} = (0, \sin x, 0)$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = z \sin x \mathbf{e}_x + \nabla \phi$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \cos x \mathbf{e}_z$$



Champs centraux

Un champ central est un champ dont la valeur ne dépend que de la distance r à un point O (centre du champ). Le gradient du champ scalaire central $V(r)$ est le champ vectoriel central

$$\nabla V(r) = \frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{dV}{dr} \mathbf{e}_r$$

et le laplacien de $V(r)$ est le champ scalaire central

$$\Delta V(r) = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right)$$

Le champ vectoriel central $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \mathbf{e}_r$ est irrotationnel et dérive du potentiel scalaire

$$V(r) = - \int E(r) dr \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r)$$

Sa divergence vaut

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{dE}{dr} + 2 \frac{E}{r}$$

Rappels de mécanique

Équation du mouvement

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v}$$

Conservation de l'énergie (où $T \equiv$ énergie cinétique)

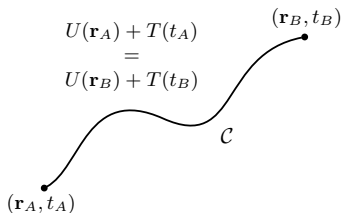
$$P = \frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad E = mc^2 = T + m_0c^2 = \sqrt{m_0^2c^4 + c^2p^2}$$

Lorsqu'une particule, soumise à une force $\mathbf{F}$, se déplace le long d'une trajectoire $\mathcal{C}$, le travail fourni par cette force est donné par

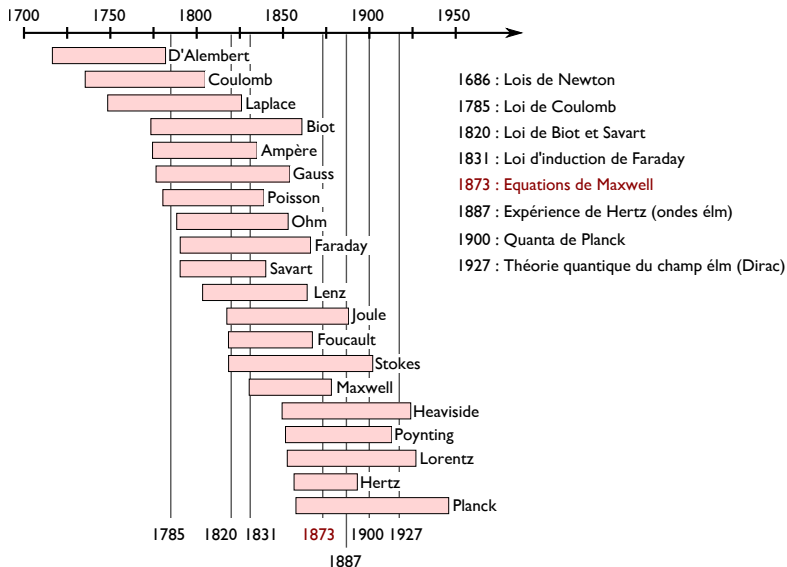
$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\ell = T(t_B) - T(t_A)$$

Si la force est conservative, c'est-à-dire dérive d'une énergie potentielle, $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$, on a également

$$W = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B)$$



Ligne du temps



La charge électrique

- La charge électrique apparaît sous deux formes : positive et négative
- La charge électrique totale d'un système isolé est constante au cours du temps, quelque soit le mouvement et le nombre des particules

(exemples : les atomes d'hydrogène et d'hélium sont électriquement neutres bien que le mouvement des électrons au sein de ces atomes soit très différent ; l'annihilation d'un électron et d'un positron n'occasionne aucune variation de charge nette)

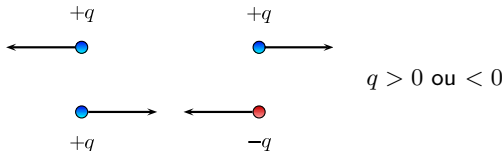
- La charge électrique est quantifiée

$$Q = ne \text{ avec } n \text{ entier et } e = q_p = -q_e \simeq 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

ou $Q = ne/3$ si on tient compte des quarks, de charges $-\frac{1}{3}e$ (quarks d, s, b) et $\frac{2}{3}e$ (quarks u, c, t)

Dirac : mécanique quantique + existence de charges magnétiques $\Rightarrow$ quantification de la charge électrique

- Interaction électrique $\gg$ interaction gravitationnelle
mais neutralité (électrique) des atomes, molécules, cristaux, ...

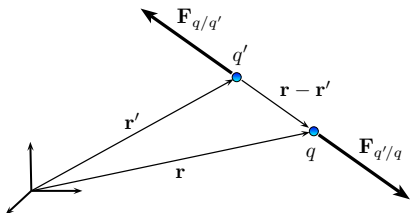


Loi de Coulomb (1785)

Les forces qui s'exercent entre deux particules ponctuelles chargées au repos sont données par la loi de Coulomb (action à distance)

$$\mathbf{F}_{q'/q}(\mathbf{r}) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{F}_{q/q'}(\mathbf{r}') \quad (\text{Coulomb})$$

La mesure des forces coulombiennes entre deux particules identiques permet d'en déterminer les charges, au signe près.



Principe de superposition

La force totale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ qu'exerce un ensemble de particules ponctuelles de charge q_i sur une charge ponctuelle q située au point $\mathbf{r}$ est donnée par

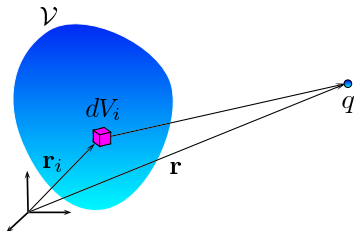
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{F}_{q_i/q}(\mathbf{r})$$

(additivité des effets de la charge électrique)

Fig. Forces coulombiennes dans le cas où q et q' sont de même signe.

Densité volumique de charge

Considérons un système possédant un nombre très élevé de charges. Chaque élément de volume dV_i centré en $\mathbf{r}_i$ contient lui-même un très grand nombre de charges donnant lieu à une charge totale dq_i . La densité volumique de charge $\rho(\mathbf{r})$ (en C.m^{-3}) est définie au travers de la relation $\boxed{dq_i = \rho(\mathbf{r}_i) dV_i}$.



La force totale qui s'exerce sur une charge ponctuelle q est alors donnée, en vertu du principe de superposition, par

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \sum_i \frac{q dq_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \\ &\rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \end{aligned}$$

Remarque : Le concept de densité volumique de charge a un sens même dans le cas d'une charge ponctuelle (un électron par exemple) puisque d'après la mécanique quantique, on peut y associer une densité (de probabilité) de charge $\rho(\mathbf{r}) = q|\psi(\mathbf{r})|^2$.

Champ électrostatique

Considérons un ensemble de particules fixes de charges q_i situées aux points $\mathbf{r}_i$ ($i = 1, \dots, N$). Si une particule « test » de charge q est placée au point $\mathbf{r}$, le système de charges exerce sur celle-ci une force $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ qui peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (\text{champ électrique})$$

→ ne dépend que du système de charges q_i

Pour une distribution volumique de charge

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

La connaissance du champ électrique en un point de l'espace suffit à déterminer la force qui agira sur une particule chargée placée en ce point.

$$[E] = \text{N.C}^{-1} \quad (\text{force par unité de charge}) \quad \text{ou} \quad \text{V.m}^{-1}$$

Loi de Gauss (1813)

Pour tout volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface S , on a

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) dV$$

où la somme court sur toutes les charges contenues à l'intérieur du volume $\mathcal{V}$.

Expression locale/différentielle :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$


K. F. Gauss
(1777-1855)

La loi de Gauss découle

- du caractère central de la force de Coulomb
- de la loi en inverse du carré de la distance pour la force entre charges
- du principe de superposition linéaire

Remarque : Cette loi se généralise à des sources et des champs non stationnaires.

Potentiel électrique

- Le champ électrostatique est
- de nature centrale
 - une quantité vectorielle additive

Il en résulte que $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est irrotationnel, $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, et dérive par conséquent d'un potentiel scalaire

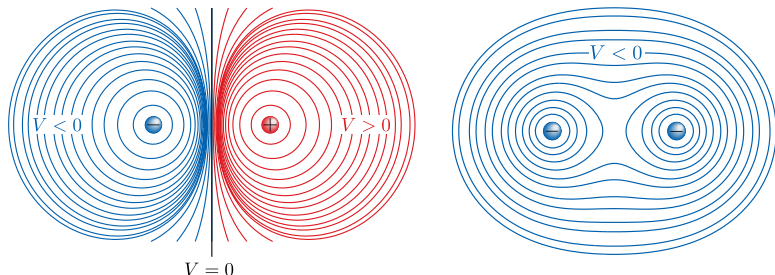
$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{ll} V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} & \text{(charges ponctuelles)} \\ \boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'} & \text{(distribution de charges)} \end{array} \right.$$

Le potentiel électrique $V(\mathbf{r})$ pour une distribution volumique de charges

- est défini à une constante additive près, choisie telle que $V(\infty) = 0$
- est fini, continu et continûment dérivable partout pourvu que $\rho(\mathbf{r})$ soit fini en tout point (et que la charge totale soit finie)
- représente l'énergie potentielle accumulée par unité de charge électrique
- s'exprime en J.C^{-1} (énergie par unité de charge) ou Volt

Equipotentielles

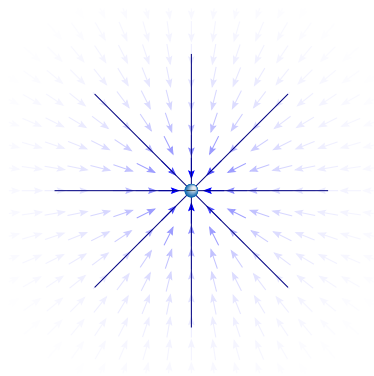
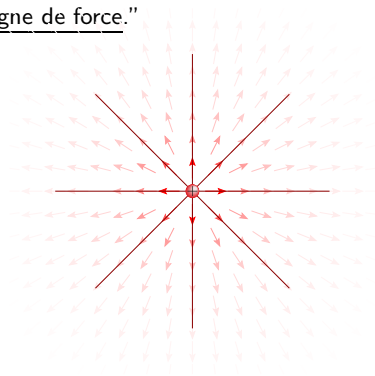
A 2 dimensions, les courbes équipotentiels sont définies comme les courbes le long desquelles le potentiel est constant. A 3 dimensions, les courbes laissent place à des surfaces équipotentiels sur lesquelles le potentiel est constant.



Courbes équipotentiels : (gauche) 2 charges opposées
(droite) 2 charges identiques.

Lignes de force

Citons Maxwell : “En chaque point de l'espace, on peut trouver une ligne qui indique la direction et le sens de la force s'exerçant sur une particule chargée positivement. La direction et le sens sont définis en tout point de l'espace ; commençons en un point quelconque et traçons une courbe telle que, lorsqu'on la parcourt, en chaque point sa direction coïncide avec celle de la force résultante en ce même point. La courbe ainsi obtenue indique la direction de la force en chacun des points où elle passe, c'est la raison pour laquelle on l'appelle une ligne de force.”



Énergie potentielle électrique

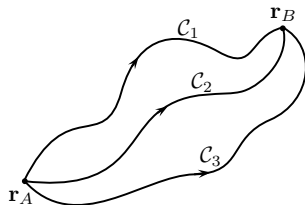
La force de Coulomb $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r})$ qui s'exerce sur une particule de charge q plongée dans un champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est conservative. Elle dérive d'une énergie potentielle $U(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r})$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \xLeftrightarrow[\text{Stokes}] \quad \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$$

Il s'ensuit que le travail fourni par la force de Coulomb qui s'exerce sur une particule de charge unitaire ($q = 1 \text{ C}$) se déplaçant le long d'une trajectoire $\mathcal{C}$ ne dépend que des positions initiale et finale :

$$W_{\text{Coulomb}} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = V(\mathbf{r}_A) - V(\mathbf{r}_B)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= - \int_{\mathbf{r}'=\infty}^{\mathbf{r}'=\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\ell}' \\ V(\infty) &= 0 \end{aligned}}$$



$$W_1 = W_2 = W_3$$

Équation de Poisson

L'équation de Poisson

$$\Delta V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

permet de calculer le potentiel électrique généré par une distribution de charge connue. C'est une équation aux dérivées partielles qui en général possède de multiples solutions. Cependant, si on impose des conditions aux limites d'un des deux types suivants

- Conditions aux limites de Dirichlet : on impose la valeur du potentiel sur la frontière (surface) du domaine considéré (par exemple un ensemble de conducteurs portés à différents potentiels).
- Conditions aux limites de Neumann : on impose la valeur du champ électrique normal (dérivée normale du potentiel) sur la frontière du domaine considéré (par exemple un ensemble de conducteurs possédants des densités surfaciques de charge connues).

et qu'il existe une solution de l'équation de Poisson, alors celle-ci est unique (à une constante additive près pour des conditions aux limites de Neumann).

Application à la sphère chargée uniformément en volume

Le potentiel et le champ électrique créé par une sphère de rayon R chargée uniformément en volume avec une densité de charge ρ_0 vaut

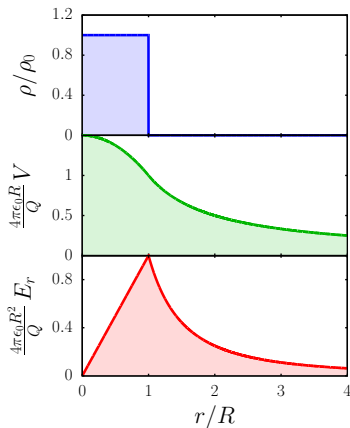


Figure. Densité de charge, potentiel et champ électrique.

Potentiel électrique :

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > R \end{cases}$$

Champ électrique : $\mathbf{E} = E_r(r) \mathbf{r}/r$ avec

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & r > R \end{cases}$$

où $Q = (4\pi/3)R^3\rho_0$ est la charge totale.

Équation de Laplace

Dans une région vide de charges, le potentiel électrique satisfait à l'équation de Laplace

$$\Delta V(\mathbf{r}) = 0$$

Les fonctions qui sont solutions de cette équation sont appelées fonctions harmoniques. Elles ont beaucoup de propriétés remarquables : elles sont infiniment continument dérivables, et satisfont notamment à la proposition suivante :

Si $V(\mathbf{r})$ vérifie l'équation de Laplace, alors la valeur moyenne de V à la surface d'une sphère de rayon *arbitraire* R est égale à la valeur de V au centre de la sphère, soit

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\substack{\text{surface de} \\ \text{la sphère} \\ \text{de rayon } R \\ \text{centrée en } \mathbf{r}}} V(\mathbf{r}') dS'$$

L'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles qu'on retrouve dans beaucoup de branches de la physique, comme l'électromagnétisme, l'astronomie, la dynamique des fluides, la mécanique quantique, ...

Théorème d'Earnshaw

Le théorème qui suit est une conséquence directe de l'équation de Laplace

Il est impossible de maintenir une particule chargée en équilibre stable uniquement à l'aide d'un champ électrostatique

Démonstration :

En effet, si une particule chargée positivement était confinée dans une région de l'espace vide de charges, le potentiel électrique posséderait un minimum strict local, tel que $V(\mathbf{r}) > V(\mathbf{r}_0)$ au voisinage du minimum $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Or ceci est impossible vu que la valeur moyenne du potentiel sur une petite sphère centrée en $\mathbf{r}_0$ doit être égale à la valeur du potentiel au centre de la sphère. Le raisonnement est similaire dans le cas d'une charge négative. Par conséquent, un minimum ou maximum local du potentiel ne peut apparaître qu'aux bords du domaine vide de charges.

Remarque : Le piégeage de particules chargées peut toutefois s'effectuer à l'aide d'un champ électrique variable dans le temps (piège de Paul), ou encore à l'aide de la superposition d'un champ électrostatique et d'un champ magnétique constant (piège de Penning).

Charges ponctuelles et densité de charge

Le potentiel électrique au point $\mathbf{r}$ créé par différents types de sources s'écrit

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}}_{\text{charges ponctuelles}} + \underbrace{\int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\ell'}_{\text{charges linéiques}} + \underbrace{\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'}_{\text{charges superficielles}} + \underbrace{\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{\text{charges volumiques}} \right]$$

Est-il possible d'associer une (fonction) densité de charge à une charge ponctuelle ? Oui, en faisant appel à la « fonction » delta de Dirac qui est nulle partout sauf à l'endroit où se trouve la charge. Ainsi, à une particule ponctuelle de charge q_i située au point $\mathbf{r}_i$, on fera correspondre une densité de charge (en C.m^{-3})

$$\rho(\mathbf{r}) = q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

La densité de charge d'une sphère de rayon R chargée uniformément en surface (charge totale q , densité surfacique σ) sera quant à elle donnée par

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma \delta(r - R) = \frac{q \delta(r - R)}{4\pi R^2}$$

« Fonction » delta de Dirac

La « fonction » $\delta(x)$ de Dirac est définie par les conditions suivantes :

$$\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

pour toute fonction $f(x)$ continue en $x = 0$.

Propriétés :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \int_{-a}^b \delta(x) dx = 1 \quad (a, b > 0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a), \quad f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \quad (a \in \mathbb{R})$
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \Rightarrow \delta(x) = \delta(-x) \text{ et } [x] = m \Rightarrow [\delta(x)] = m^{-1}$
- $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$ où $f'(x)$ est la dérivée de $f(x)$ et les x_i sont les zéros simples de la fonction $f(x)$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x)$

« Fonction » delta de Dirac

La « fonction » delta peut être vue comme une limite de fonctions (valable uniquement sous le signe intégrale)

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \delta_a(x)$$

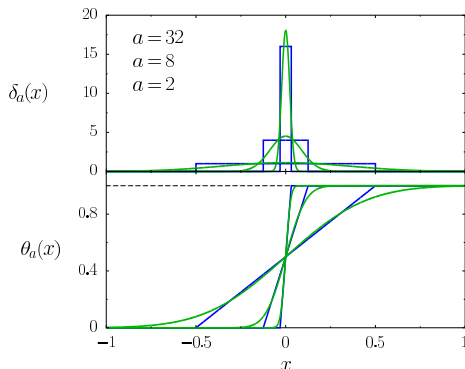
avec

$$(1) \quad \delta_a(x) = \begin{cases} \frac{a}{2}, & -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(2) \quad \delta_a(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 x^2}, \dots$$

$$\theta_a(x) = \int_{-\infty}^x \delta_a(x') dx' \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{fonction d'Heaviside})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)}$$



« Fonction » delta de Dirac

À trois dimensions

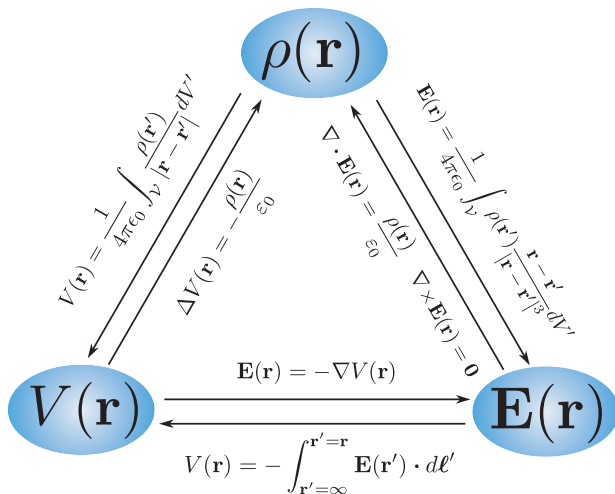
$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \quad \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) dV = f(\mathbf{0})$$

Coordonnées	$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$
cartésiennes	$\delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$
cylindriques	$\delta(\rho - \rho') \frac{\delta(\varphi - \varphi')}{\rho} \delta(z - z')$
sphériques	$\delta(r - r') \frac{\delta(\theta - \theta')}{r} \frac{\delta(\varphi - \varphi')}{r \sin \theta}$

Deux relations utiles en électromagnétisme

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \Delta_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Électrostatique $[\rho(\mathbf{r}, t) \simeq \rho(\mathbf{r}), \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \simeq 0, \mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r})]$



Développement multipolaire

Le potentiel électrique à l'extérieur ($r > r'_{\max}$) d'une distribution volumique de charge peut s'écrire sous la forme d'un développement en série en $1/r$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \left(3 \frac{r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^4} \right) \right] \end{aligned}$$

avec

$$q = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) dV \quad (\text{scalaire})$$

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV \quad (\text{vecteur})$$

$$Q_{ij} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) r_i r_j dV \quad (\text{tenseur d'ordre 2})$$

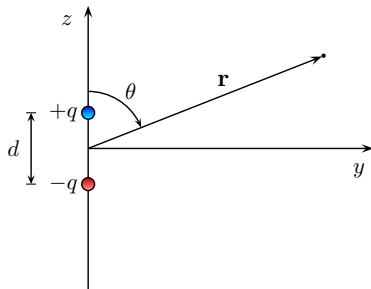
où q est la charge totale (moment monopolaire), $\mathbf{p}$ est appelé moment dipolaire électrique et $\mathcal{Q}$ tenseur quadrupolaire électrique de la distribution de charge. Le tenseur $\mathcal{Q}$ est symétrique ($Q_{ij} = Q_{ji}$).

Dipôle électrique

Que vaut le potentiel électrique loin du dipôle ($r \gg d$) ?

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} [1 + \mathcal{O}(d/r)] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} [1 + \mathcal{O}(d/r)] \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = qd \mathbf{e}_z
 \end{aligned}$$

= moment dipolaire électrique
de la paire de charges $\pm q$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla V(\mathbf{r}) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \right) [1 + \mathcal{O}(d/r)]
 \end{aligned}$$

Dipôle ponctuel : $d \rightarrow 0$, $q \rightarrow +\infty$
 $qd = p$

Équipotentielles et lignes de champ d'un dipôle ponctuel

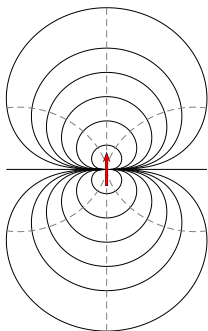
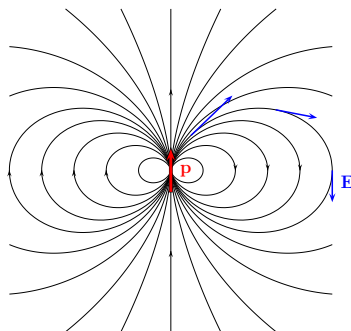
Équipotentielles : $r = a\sqrt{\cos \theta}$ Lignes de champ : $r = b \sin^2 \theta$ 

Fig. Représentation des lignes de champ et des équipotentielles du dipôle ponctuel.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

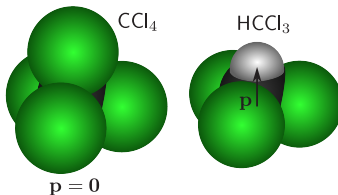
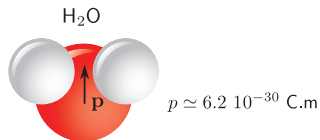
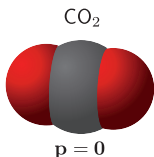
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \right]$$

Moment dipolaire des molécules

Atomes : ne possèdent pas de moment dipolaire électrique permanent.

Molécules : peuvent posséder un moment dipolaire électrique permanent.

Exemple : les molécules diatomiques du même élément (O_2 , H_2 , ...) sont non-polaires. Par contre, les molécules diatomiques formées de deux espèces atomiques différentes (HCl , CO , ...) sont polaires.



Énergie potentielle d'un dipôle électrique

L'énergie potentielle de rotation d'un dipôle électrique (ponctuel) dans un champ électrique *extérieur* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est donnée par

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Le dipôle est soumis à un moment (couple) de force

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

qui tend à l'orienter parallèlement au champ électrique extérieur $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Dans un champ électrique *non-uniforme*, le dipôle est soumis à une force

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

qui le pousse dans les régions de forte intensité du champ.

Remarque : L'expression obtenue pour l'énergie potentielle de rotation du dipôle peut également se dériver à partir du moment de force $\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|$ en utilisant la relation $dU = -dW = \boldsymbol{\tau} d\theta$.

Interaction dipôle–dipôle

Si l'on met deux dipôles en interaction, chaque dipôle va ressentir le champ créé par l'autre. L'énergie potentielle du premier dipôle dans le champ créé par le second est (on pose $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$)

$$U_{12} = -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^5} - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r_{12}^3} \right]$$

On note que $U_{12} = U_{21} (\equiv U)$. Cette énergie d'interaction U est à l'origine des interactions intermoléculaires. Elle conduit à de nombreuses forces attractives : tension de surface, forces visqueuses, force de cohésion, force d'adhésion, ...

On peut encore l'écrire sous la forme

$$U = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r_{12}^3}$$

où λ ne dépend que de l'orientation des dipôles par rapport à la ligne qui les joint ($\lambda = 2$ si les dipôles sont alignés sur la ligne, auquel cas l'énergie est minimum).

Énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles

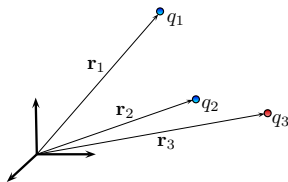
Le travail que nous devons fournir pour assembler une certaine configuration de charges $q_1, q_2, q_3, \dots$ vaut (par étapes)

$$W_{q_1} = 0$$

$$W_{q_1+q_2} = - \int_{\mathbf{r}'=\infty}^{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_{q_1/q_2}(\mathbf{r}') \cdot d\ell' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

$$W_{q_1+q_2+q_3} = W_{q_1+q_2} + W_{q_1+q_3} + W_{q_2+q_3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_1 q_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{q_2 q_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right)$$



L'énergie électrostatique emmagasinée dans un système de N charges ponctuelles $q_1, \dots, q_N$ situées aux points $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ est égale à ce travail,

$$U_{\text{élec}} = \sum_{\text{paires}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\mathbf{r}_i)$$

où $V(\mathbf{r}_i)$ est le potentiel créé en $\mathbf{r}_i$ par toutes les charges sauf q_i .

Énergie électrostatique d'une distribution de charges

L'expression pour une distribution volumique de charges s'écrit

$$U_{\text{élec}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\mathbf{r}_i) \longrightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dV$$

ou encore

$$U_{\text{élec}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2(\mathbf{r}) dV$$

Interprétation

L'énergie électrostatique $U_{\text{élec}}$ d'un système de charges, qui est égale au travail total nécessaire pour amener le système à sa configuration, est disséminée dans tout l'espace où règne un champ électrique avec une densité (énergie par unité de volume)

$$u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\mathbf{r})$$

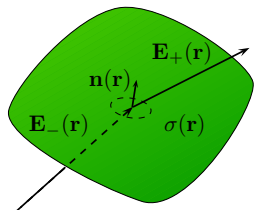
Discontinuités possibles du champ électrique

La composante du champ électrique normale à une surface chargée subit une discontinuité au travers de cette surface. Les composantes tangentielles du champ électrique sont par contre toujours continues.

En tout point de la surface, nous avons les relations

$$(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$



Remarque : En réalité, les charges à la surface d'un conducteur sont distribuées sur une épaisseur de l'ordre de 10^{-9}m . À cette échelle, le champ électrique varie continûment de la valeur intérieure à la valeur extérieure à la surface.

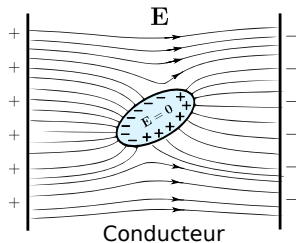
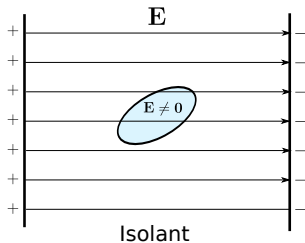
Champ électrique autour des conducteurs

Isolant : les charges sont fixes (plastique, verre, ...)

Conducteur : les charges sont libres de se déplacer (Au, Ag, Cu, Al, ...)

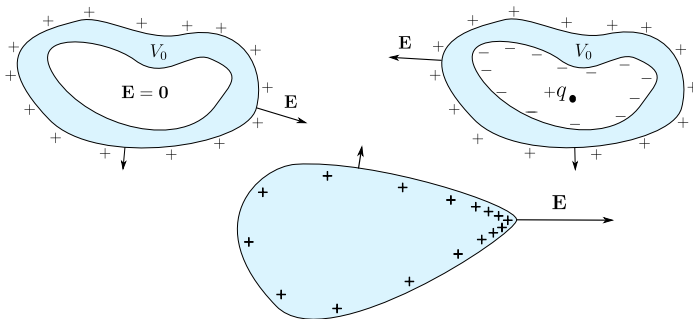
À l'équilibre,

- Le champ électrique $\mathbf{E}$ à l'intérieur d'un conducteur est nul et le potentiel y est constant ainsi qu'en tout point de la surface. En effet, si $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$, les charges $> 0 (< 0)$ migrent en direction du minimum (maximum) de potentiel, jusqu'à ce que le potentiel devienne homogène et $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Pour des métaux typiques, cette migration est très rapide (de l'ordre de $10^{-16} - 10^{-17}$ s).
- En tout point situé juste à l'extérieur d'un conducteur, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est normal à sa surface, et $E(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})/\epsilon_0$ où $\sigma(\mathbf{r})$ est la densité locale de charge de surface.



Champ électrique autour des conducteurs

- Dans une région creuse à l'intérieur d'un conducteur, $V(\mathbf{r})$ est constant et $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ si il n'y a pas de charges à l'intérieur de celle-ci. Ceci reste vrai pour des conducteurs chargés. Les milieux conducteurs permettent donc d'écranter le champ électrique. C'est le principe de la cage de Faraday.
- Une charge $+q$ à l'intérieur de la cavité induit une charge $+q$ sur la surface extérieure du conducteur.
- Le champ électrique est plus intense dans les régions à faible rayon de courbure.



Effet de pointe

Les charges qui se distribuent à la surface d'un conducteur ont tendance à s'accumuler dans les régions à faible rayon de courbure. C'est l'effet de pointe sur lequel est basé le principe du paratonnerre. Considérons à titre d'exemple 2 sphères conductrices chargées, reliées entre elles par un fil conducteur ($V_1 = V_2$). Lorsque ces deux sphères sont fortement éloignées l'une de l'autre, nous avons en excellente approximation

$$V_1 \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} \simeq V_2$$

$$E_1 \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1^2} \simeq \frac{V_1}{R_1}$$

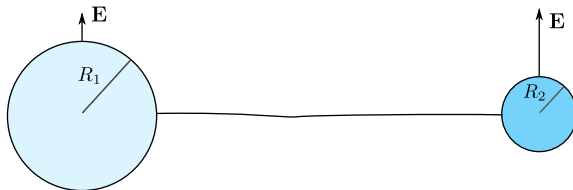
$$E_2 \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2^2} \simeq \frac{V_2}{R_2}$$

 $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} \simeq \frac{R_2}{R_1}}$$

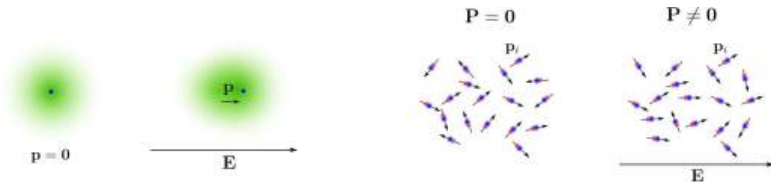
 $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \simeq \frac{R_2}{R_1}}$$



Mécanismes de polarisation de la matière

Lorsque la matière composée d'atomes/molécules est plongée dans un champ électrique $\mathbf{E}$, elle se *polarise*. Les molécules vont s'étirer (moments dipolaires induits) et, dans le cas où elles possèdent un moment dipolaire permanent, s'orienter dans le champ électrique.



Considérons un petit élément de volume ΔV , centré en $\mathbf{r}$, grand vis-à-vis des dimensions moléculaires, mais petits vis-à-vis des dimensions macroscopiques. Cet élément contient un moment dipolaire $\mathbf{p}$, qui est la somme des dipôles associés aux atomes ou aux molécules. On définit le vecteur polarisation $\mathbf{P}$ par

$$\mathbf{p} = \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{p}_i = \mathbf{P}(\mathbf{r})\Delta V \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) \equiv \text{densité de moment dipolaire (en C.m}^{-2}\text{)}$$

Potentiel à l'extérieur du matériau

Le potentiel à l'extérieur du matériau peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\mathcal{V}_f} \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{\mathcal{V}_d} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\mathcal{V}_f} \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{\mathcal{V}_d} \frac{\rho_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{S_d} \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right]
 \end{aligned}$$

avec les densités de charges induites par polarisation

$$\rho_P(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

$$\sigma_P(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

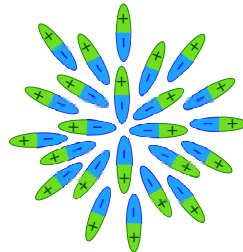
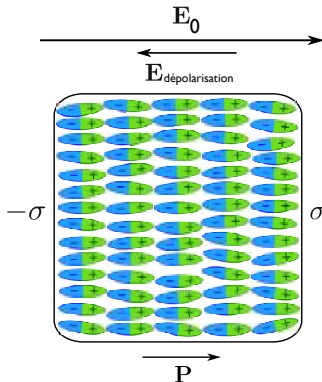
$\mathbf{n} \equiv$ normale extérieure au volume $\mathcal{V}_d$

Du point de vue du potentiel généré, le matériau est équivalent à une distribution volumique de charges (induites) $\rho_P(\mathbf{r})$ et à une distribution surfacique de charges (induites) $\sigma_P(\mathbf{r})$.

On peut montrer que le potentiel à l'*intérieur* du matériau prend la même forme pourvu que l'on moyenne les variations rapides qui apparaissent à l'échelle moléculaire.

Charges de polarisation

Un matériau isolant est constitué de dipôles mis bout à bout. Lorsque la polarisation est uniforme dans le matériau, le pôle négatif d'un dipôle étant très proche du pôle positif du dipôle suivant, et les charges étant égales en valeur absolue, il y a annulation de leurs effets à grande distance. Seuls, alors, les pôles positifs/négatifs sur les faces avant/arrière seront importants. Ce n'est rien d'autre que les charges induites à la surface du matériau. De plus, si la divergence du vecteur polarisation est différente de zéro en un endroit du matériau, il existe nécessairement une charge induite en volume à cet endroit.



$$\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) > 0$$

Déplacement électrique $\mathbf{D}$

Dans un matériau, la loi de Gauss doit être modifiée pour tenir compte des charges induites. La distribution totale de charges est la superposition des charges libres (f) et des charges induites par polarisation (P)

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_P(\mathbf{r})$$

En définissant le vecteur déplacement électrique par

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

on obtient un nouveau champ qui permet de réécrire la loi de Gauss pour ne faire intervenir que les charges libres. En effet, on a

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q_f$$

En tout point de la surface du matériau (sans charges libres de surface), la composante normale de $\mathbf{D}$ est continue, ainsi que les composantes tangentielles de $\mathbf{E}$.

$$(\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Diélectrique – Susceptibilité électrique

En général, la polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ qui apparaît dans un matériau est en tout point proportionnelle au champ électrique (total) $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en ce point,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \simeq \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Un tel matériau est appelé diélectrique. Le coefficient sans dimension χ_e est la susceptibilité (di)électrique. Quelques valeurs usuelles sont données dans le tableau ci-dessous.

État	matière	χ_e [20°C]
–	vide	0
gaz	air	0.0006
gaz	eau	0.0126
liquide	eau	80
liquide	glycérine	41
solide	verre	6
solide	germanium	15

Déplacement électrique $\mathbf{D}$ pour un diélectrique

Pour un matériau diélectrique, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \\ &\simeq \underbrace{\epsilon_0(1 + \chi_e)}_{\epsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

où ϵ est la permittivité du diélectrique. Il s'ensuit que l'intensité du champ électrique régnant dans une région de l'espace remplie d'un matériau diélectrique est réduite d'un facteur $(1 + \chi_e)$ par rapport à l'intensité du champ électrique appliqué (dans le vide). On dit que la polarisation du matériau donne lieu à un champ de dépolarisation qui s'oppose au champ appliqué. Le vecteur polarisation s'exprime en fonction du déplacement électrique par

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

L'équation de Poisson pour un matériau diélectrique devient

$$\Delta V(\mathbf{r}) \simeq -\frac{\rho_f(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

Charge au centre d'une sphère diélectrique

Considérons une charge q au centre d'une sphère diélectrique de permittivité ϵ et de rayon R . La loi de Gauss généralisée donne

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r & r > R \end{cases}$$

À l'intérieur de la sphère diélectrique, le champ électrique est inférieur au champ électrique qu'aurait généré la même charge dans le vide. Le champ électrique est discontinu au travers de la surface de la sphère, à l'inverse du vecteur déplacement $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$. La polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r})$ donne lieu à une densité volumique de charges nulle en tout point sauf à l'origine et une densité surfacique de charges constante et positive

$$\rho_P(r) = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} q \delta(\mathbf{r}) \qquad \sigma_P = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \sigma_R$$

où $\sigma_R = q/(4\pi R^2)$ est la charge superficielle que l'on obtiendrait si la charge q était dispersée sur la surface de la sphère.

Énergie dans un diélectrique

En présence de diélectriques, on peut montrer que

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV$$

ce qui permet de définir une densité d'énergie électrostatique

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{2} E^2(\mathbf{r})$$

En la comparant à la densité d'énergie électrostatique u_0 dans le vide où règne un champ $\mathbf{E}_0$, on remarque que la densité d'énergie électrostatique se trouve alors réduite d'un facteur $(1 + \chi_e)$ dans un diélectrique. En effet,

$$u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0(1 + \chi_e)}{2} E^2(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{E_0^2(\mathbf{r})}{(1 + \chi_e)} = \frac{u_0(\mathbf{r})}{(1 + \chi_e)}$$

Cette réduction de l'énergie électrostatique dans un diélectrique permet de définir une force par unité de volume qui agit sur ceux-ci

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2} E^2(\mathbf{r}) \right) \Rightarrow \mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}_d} \mathbf{f}(\mathbf{r}) dV$$

Champ magnétique

La force électromagnétique qui agit sur une particule chargée ne dépend pas uniquement de sa position mais également de sa vitesse. Elle peut être décomposée en deux forces :

- une force électrique qui ne dépend pas du mouvement de la charge mais uniquement de sa position $\rightarrow$ décrite par le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$
- une force, dite magnétique, qui dépend du mouvement de la charge

Cette force magnétique possède, à tout instant,

- une direction orthogonale au vecteur vitesse de la particule chargée et orthogonale à une direction (définissant celle du champ magnétique) indépendante des caractéristiques de la particule
- un module proportionnel à la charge électrique q et à la composante de la vitesse orthogonale à cette direction

Le champ magnétique $\mathbf{B}$ (en $\text{kg.s}^{-2}.\text{A}^{-1}$) est défini, en tout point de l'espace et à tout instant, au travers de la force électromagnétique totale qui agit sur une charge en mouvement, que l'on écrit sous la forme

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (\text{force de Lorentz})$$

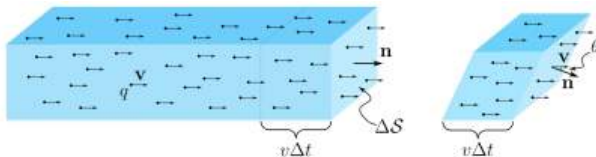
Densité de courant (électrique) $\mathbf{j}$

Un écoulement de charges peut être décrit par un champ vectoriel $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, appelé densité de courant (en $\text{C.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$), dont la direction est, en tout point, celle de l'écoulement des charges et dont l'amplitude correspond à la quantité de charges passant, par unité de surface et par unité de temps, au travers d'un élément de surface ΔS perpendiculaire à l'écoulement. Considérons, à un instant t , un élément de surface ΔS centré en $\mathbf{r}$. La quantité de charges Δq qui s'écoule en un temps Δt au travers de cet élément de surface vaut

$$\begin{aligned}\Delta q &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t && (\text{par définition}) \\ &= \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t\end{aligned}$$

d'où on tire

$$\boxed{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}$$



Courant électrique I

Lorsqu'il y a plusieurs types de porteurs de charges (électrons, protons, ...),

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{j}_i(\mathbf{r}, t) = \sum_i \rho_i(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t)$$

Il est intéressant de noter que l'on peut avoir $\mathbf{j} = \sum_i \mathbf{j}_i \neq \mathbf{0}$ avec $\rho = \sum_i \rho_i = 0$. C'est d'ailleurs le cas pour un courant qui parcourt un fil conducteur. Ceci explique que bien que la force magnétique soit beaucoup plus faible que la force électrique si on considère seulement deux charges électriques en interaction mutuelle, comme il est possible de mettre un très grand nombre de charges électriques en mouvement sans nécessairement dégager une charge électrique nette, la force magnétique exercée par un courant macroscopique peut tout à fait être non négligeable.

Le courant électrique au travers d'une surface S (en C.s^{-1}), qui est la charge traversant S par unité de temps, est le flux de la densité de courant $\mathbf{j}$ au travers de cette surface (orientée)

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

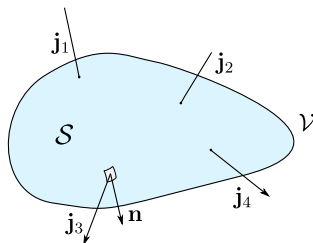
Équation de continuité – conservation locale de la charge

Expérimentalement, on observe que la charge électrique totale d'un système isolé est constante au cours du temps, ou encore que la charge électrique (nette) n'est jamais ni créée ni détruite.

Si on considère une surface fermée $\mathcal{S}$, la diminution (ou augmentation) de la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface doit résulter du passage des charges au travers de la surface. On en déduit l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

valable à tout instant et en tout point de l'espace.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour des courants constants :} \\ \text{(magnétostatique)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \end{array} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0}$$

Loi de Biot et Savart (1820)

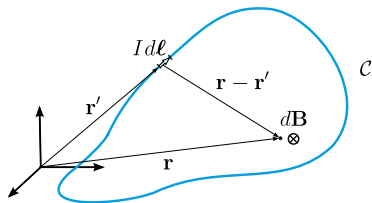
Suite à l'observation des influences mutuelles entre des fils parcourus par des courants constants, Biot et Savart postulent qu'un élément de courant $I d\ell$ situé en $\mathbf{r}'$ produit, en tout point de l'espace, un champ magnétique

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\ell(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Principe de superposition

Le champ magnétique créé par une boucle (fermée) $\mathcal{C}$ parcourue par un courant constant d'intensité I est donné, en tout point de l'espace, par

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\mathcal{C}} d\ell(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$



Loi de Biot et Savart (II)

Le champ magnétique créé par un élément de courant $I d\ell$ peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} d\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I d\ell(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{r}')$ serait la vitesse de l'élément de charge dq situé en $\mathbf{r}'$ à l'origine du courant et $d\mathbf{E}(\mathbf{r})$ serait le champ électrique au point $\mathbf{r}$ créé par cet élément de charge. L'expérience et la théorie nous enseignent que $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, donc

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Rapport des forces électrique et magnétique (qui s'exercent sur une particule test de charge q_t et de vitesse $\mathbf{v}_t$) :

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{F}_e &= q_t d\mathbf{E} \\ d\mathbf{F}_m &= q_t \mathbf{v}_t \times \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{E} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dF_m}{dF_e} = A \frac{v v_t}{c^2} < 1$$

Champ magnétique créé par une distribution de courants constants

Pour une distribution volumique de courants constants, on a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

où $\mathcal{V}$ est la portion de l'espace contenant les charges en mouvement à l'origine des courants électriques.

Remarque : Pour des courants variables, cette formule donne une expression approchée du champ magnétique, correcte au premier ordre en v/c . En particulier, pour une particule chargée en mouvement, on a $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = q \mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)) \neq \mathbf{j}(\mathbf{r}')$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{v}(t) \times \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)|^3}$.

Il s'ensuit que le champ magnétique est indivergentiel (ceci reste vrai pour des champs magnétiques variables dans le temps), soit

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0} & \Leftrightarrow & \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \\ \forall \mathbf{r} & & \forall \text{ surface fermée } \mathcal{S} \end{array}$$

Potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

En tout point de l'espace,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

Interprétation et conséquences :

- La densité de charges magnétiques est nulle (jusqu'à présent, personne n'a jamais observé de charges magnétiques, uniquement des charges électriques)
- Le flux de champ magnétique au travers d'une surface fermée est nul
 $\Rightarrow$ conservation du flux magnétique le long des lignes de champ
- Le champ magnétique dérive d'un potentiel vecteur

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \nabla \chi(\mathbf{r})$$

$$\text{Jauge de Coulomb : } \nabla \chi(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0} \text{ pour } r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Loi d'Ampère

Le rotationnel du champ magnétique est en tout point de l'espace proportionnel à la densité de courant électrique

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

L'équation correspondante pour le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (dont dérive le champ magnétique) s'écrit, en jauge de Coulomb,

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

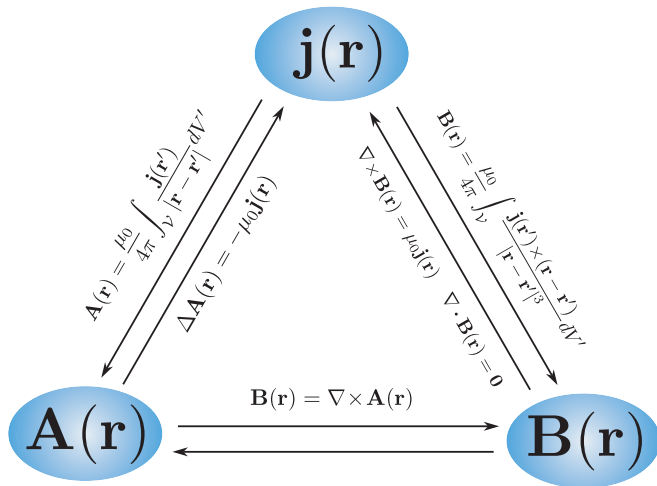
Loi d'Ampère

Considérons une surface $\mathcal{S}$, limitée par un contour $\mathcal{C}$, et traversée par un courant I (ce qui nécessite de choisir arbitrairement un sens pour la normale $\mathbf{n}$ à la surface). On a (en respectant la règle de la main droite pour le sens de parcours de $\mathcal{C}$)

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I$$

(Ampère)

Magnétostatique $[\partial_t \mathbf{j} = 0, \partial_t \mathbf{E} = 0], \mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
 en jauge de Coulomb $[\nabla \cdot \mathbf{A} = 0]$



Analogie électrostatique – magnétostatique (en jauge de Coulomb)

Électrostatique $[\partial_t \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0]$	Magnétostatique $[\partial_t \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0, \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0]$
$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3} dV'$ $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ $\Delta V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ $\int_{S \text{ fermée}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$ $\oint_{\mathcal{C} \text{ fermée}} \mathbf{E} \cdot d\ell = 0$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3} dV'$ $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$ $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ $\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$ $\int_{S \text{ fermée}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ $\oint_{\mathcal{C} \text{ fermée}} \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I$

Force magnétique sur une distribution de courants

La force magnétique que subit une particule ponctuelle de charge q et de vitesse $\mathbf{v}(t)$ plongée dans un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ est donnée par

$$\mathbf{F}_m(t) = q \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t) \quad (\text{Lorentz avec } \mathbf{E} = \mathbf{0})$$

où $\mathbf{r}(t)$ est la position de la particule à l'instant t .

Le long d'une boucle de courant, chaque élément de courant $I d\ell$ subit une force $d\mathbf{F} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B} = I d\ell \times \mathbf{B}$, résultant en une force totale

$$\mathbf{F}_m(t) = \oint_C I d\ell \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Au sein d'une distribution volumique de courants, chaque élément de courant $\mathbf{j} dV$ subit une force $d\mathbf{F} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho dV \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV$, résultant en une force totale

$$\mathbf{F}_m(t) = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) dV$$

Développement multipolaire

Le potentiel vecteur à l'extérieur ($r > r'_{\max}$) d'une distribution volumique de courants constants peut s'écrire sous la forme d'un développement en série

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\mathbf{0} + \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right] \propto \frac{1}{r^2}$$

avec

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV$$

où le terme monopolaire est nul pour cause d'absence de charges magnétiques et où $\mathbf{m}$ est appelé moment dipolaire magnétique de la distribution de courants.

Dans le cas d'une boucle fermée $\mathcal{C}$ confinée dans un plan et parcourue par un courant constant d'intensité I , $\mathbf{m}$ prend la forme

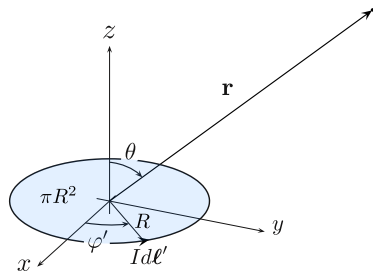
$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) = IS\mathbf{n}$$

où S est la surface délimitée par la boucle $\mathcal{C}$ et $\mathbf{n}$ est la normale au plan contenant la boucle (orientée d'après le sens du courant).

Dipôle magnétique

Considérons une boucle circulaire de rayon R parcourue par un courant constant d'intensité I . Que vaut le potentiel vecteur loin de la boucle ($r \gg R$) ?

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\ell'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi R^2 I}{r^3} (-y, x, 0) [1 + \mathcal{O}(R/r)] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} [1 + \mathcal{O}(R/r)] \quad \text{avec} \quad \mathbf{m} = \pi R^2 I \mathbf{e}_z \\
 &\quad = \text{moment dipolaire magnétique} \\
 &\quad \quad \text{de la boucle circulaire}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \right) [1 + \mathcal{O}(R/r)]
 \end{aligned}$$

Dipôle ponctuel : $R \rightarrow 0$, $I \rightarrow +\infty$
 $\pi R^2 I = m$

Comparaison dipôles électrique-magnétique non ponctuels

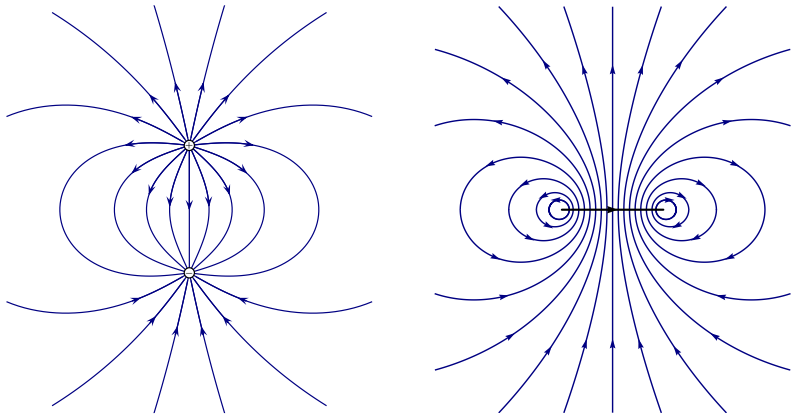


Fig. Lignes de champ électrique d'un dipôle électrique non ponctuel (à gauche)
Lignes de champ magnétique d'un dipôle magnétique non ponctuel (à droite).

Discontinuités possibles du champ magnétique

Une distribution volumique de courants avec une densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ finie en tout point de l'espace crée un potentiel vecteur et un champ magnétique

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

qui sont finis et continus en tout point de l'espace. Toutefois, en présence de courants de surface (comme sur des conducteurs superficiels), $\mathbf{B}$ peut présenter des discontinuités.

La composante du champ magnétique tangente à une surface parcourue par un courant (densité superficielle de courant $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ en $\text{C.s}^{-1}.\text{m}^{-1}$) subit une discontinuité au travers de cette surface. La composante normale du champ magnétique est par contre toujours continue.

En tout point de la surface, nous avons les relations

$$(\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$(\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) \times \mathbf{n} = -\mu_0 \mathbf{K}$$

Énergie potentielle d'un dipôle magnétique

Un dipôle magnétique (ponctuel) plongé dans un champ magnétique extérieur $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ est soumis à un couple de force

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

L'énergie potentielle de rotation du dipôle magnétique est donnée par

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

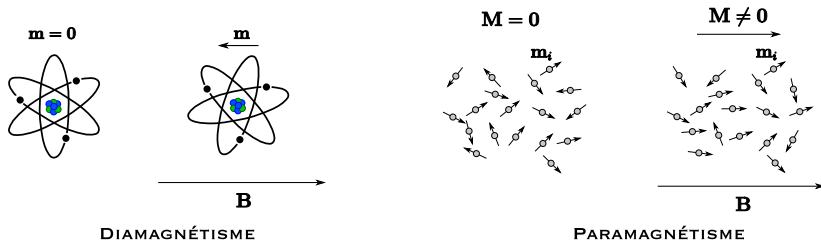
Dans un champ magnétique non-uniforme, le dipôle magnétique est soumis à une force

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}))$$

- Moment dipolaire parallèle au champ extérieur : la force agit dans la direction où l'intensité du champ augmente
- Moment dipolaire antiparallèle au champ extérieur : la force agit dans la direction où l'intensité du champ décroît
- Champ extérieur uniforme : force nulle

Mécanismes de magnétisation de la matière

Lorsqu'un matériau est plongé dans un champ magnétique $\mathbf{B}$, il y a apparition d'un moment magnétique macroscopique induit. Si les atomes/molécules possèdent un moment magnétique permanent, ils vont s'orienter de manière préférentielle parallèlement au champ magnétique appliqué (paramagnétisme). Dans tous les cas (moment magnétique permanent ou pas), l'application d'un champ magnétique a pour effet de conférer au nuage électronique de chaque atome un mouvement de rotation supplémentaire qui va induire un moment magnétique (diamagnétisme). D'après la loi de Lenz, ce moment magnétique induit s'oppose au champ $\mathbf{B}$ qui lui a donné naissance.



Magnétisation/aimantation $\mathbf{M}$

Considérons un petit élément de volume ΔV , centré en $\mathbf{r}$, grand vis-à-vis des dimensions atomiques, mais petits vis-à-vis des dimensions macroscopiques. Cet élément contient un moment dipolaire magnétique $\mathbf{m}$, qui est la somme des dipôles $\mathbf{m}_i$ associés aux atomes ou aux molécules. On définit la magnétisation (ou encore aimantation) $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ en tout point du matériau par

$$\mathbf{m} = \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{m}_i = \mathbf{M}(\mathbf{r})\Delta V$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) \equiv \text{densité de moment dipolaire magnétique (A.m}^{-1}\text{)}$$

Remarque

Les particules qui constituent la matière qui nous entoure (électrons, protons et neutrons) possèdent un moment magnétique intrinsèque, appelé moment magnétique de spin. L'explication des propriétés magnétiques de la matière ne peut se faire que dans le cadre de la mécanique quantique en tenant compte de ces moments magnétiques intrinsèques.

Potentiel vecteur à l'extérieur du matériau

Le potentiel vecteur à l'extérieur du matériau peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{\mathcal{V}_m} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{\mathcal{V}_m} \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{\mathcal{S}_m} \frac{\mathbf{K}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right]\end{aligned}$$

avec les densités de courants induits

$$\mathbf{j}_M(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{K}_M(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}$$

$\mathbf{n} \equiv$ normale extérieure au volume $\mathcal{V}_m$

On voit donc que le matériau est équivalent (au niveau du potentiel vecteur généré) à une distribution volumique de courants (induits) $\mathbf{j}_M(\mathbf{r})$ et à une distribution surfacique de courants (induits) $\mathbf{K}_M(\mathbf{r})$.

On peut montrer que le potentiel vecteur à l'intérieur du matériau prend la même forme si on moyenne les variations rapides qui apparaissent à l'échelle atomique.

Champ magnétique $\mathbf{H}$ – Induction magnétique $\mathbf{B}$

Comme la magnétisation $\mathbf{M}$ induit un courant $\mathbf{j}_M$ qui s'ajoute au courant des charges libres $\mathbf{j}_f$, on a

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_M(\mathbf{r})$$

On introduit alors le champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ par

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

qui permet de réécrire la loi d'Ampère pour ne faire intervenir que les courants libres

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I_f$$

En tout point de la surface du matériau (sans courant libre de surface), les composantes tangentielles de $\mathbf{H}$ sont continues, ainsi que la composante normale de $\mathbf{B}$.

$$(\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$(\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Susceptibilité magnétique

En général, l'aimantation $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ qui apparaît dans un matériau est en tout point proportionnelle à l'induction magnétique (totale) $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. L'usage veut qu'on écrive une relation de proportionnalité entre l'aimantation $\mathbf{M}$ et le champ magnétique $\mathbf{H}$, soit

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) \simeq \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

où χ_m est appelé la susceptibilité magnétique du matériau (nombre sans dimension). Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 (\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r})) \\ &\simeq \underbrace{\mu_0 (1 + \chi_m)}_{\mu} \mathbf{H}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

où μ est la perméabilité du matériau (μ_0 étant appelé perméabilité du vide). On distingue trois comportements selon la valeur de χ_m

- $\chi_m < 0 \Leftrightarrow \mu < \mu_0 \Rightarrow |\mathbf{B}| < \mu_0 |\mathbf{H}|$ (*diamagnétisme*)
- $\chi_m > 0 \Leftrightarrow \mu > \mu_0 \Rightarrow |\mathbf{B}| > \mu_0 |\mathbf{H}|$ (*paramagnétisme*)
- $\chi_m = \chi_m(|\mathbf{B}|)$ (*ferromagnétisme*)

Susceptibilité magnétique

matière	χ_m [20°C]	statut
vide	0	—
eau	-0.9×10^{-5}	dia
Bi	-16.6×10^{-5}	dia
C	-2.1×10^{-5}	dia
O ₂	0.19×10^{-5}	para
Al	2.1×10^{-5}	para
Pt	28×10^{-5}	para

Pour les matériaux paramagnétiques, composés d'atomes (ou molécules) présentant un moment magnétique permanent, l'effet diamagnétique est toujours présent mais il est masqué par l'effet paramagnétique.

Les matériaux ferromagnétiques (Fe, Co, Ni, Fe₃O₄, ...) présentent une aimantation non nulle de manière permanente (en l'absence de champ magnétique appliqué) et des susceptibilités magnétiques très élevées ($\chi_m \sim 100$).

Retour sur la loi de Gauss

La loi de Gauss pour le champ électrostatique peut s'écrire sous la forme

$$q_{\text{int}} = \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

Elle découle directement de la loi de Coulomb pour la force électrique entre deux charges ponctuelles au repos et montre que la mesure (du flux) du champ électrique créé par une particule permet d'en déterminer la charge.

Par extension, la charge électrique d'une particule en mouvement est définie au travers de la loi de Gauss dépendante du temps,

$$q_{\text{int}} = \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

bien que dans ce cas, le champ électrique possède une forme plus compliquée que celui créé par une charge ponctuelle au repos. L'expérience montre que la charge électrique définie plus haut est une caractéristique intrinsèque des particules fondamentales, quelque soit leur état de mouvement. C'est le principe d'invariance de la charge.

Charge électrique d'une particule en mouvement

La charge électrique d'une particule ne dépend pas de son état de mouvement. Elle a la même valeur pour tous les observateurs inertiels (c'est un invariant scalaire).

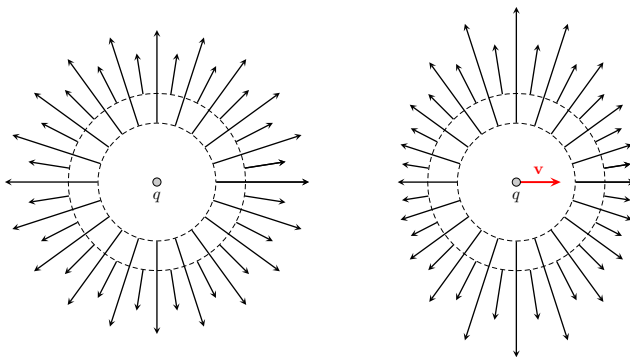


Fig. Champ électrique (a) d'une particule chargée au repos, (b) d'une particule chargée en MRU ($v = 0.6c$). Dans les deux cas, $q = \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS$.

Loi d'induction de Faraday - boucle stationnaire

En 1831, Faraday découvre qu'une variation de flux de champ magnétique au travers d'une boucle conductrice fermée et stationnaire $\mathcal{C}$ induit un courant dans celle-ci. Il en déduit qu'un champ magnétique variable induit un champ électrique, à l'origine du courant. Expérimentalement, on trouve que le courant résulte d'une force électromotrice $\mathcal{E}_{\text{stat}}$ (un scalaire noté fem et exprimé en J/C) obéissant à la loi de Faraday

$$\mathcal{E}_{\text{stat}}(t) \equiv \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \left. \frac{d\phi_{\mathbf{B}}}{dt} \right|_{\text{du aux variations de } \mathbf{B}}$$

où

$$\phi_{\mathbf{B}} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

est le flux de champ magnétique au travers de la boucle stationnaire. L'expérience montre que la loi de Faraday est valable en toute généralité, même pour des boucles immatérielles.

Le signe de $\mathcal{E}_{\text{stat}}$ est donné par la loi de Lenz : la force électromotrice induit un courant qui crée un flux magnétique s'opposant à la variation de flux imposée.

Loi d'induction de Faraday - boucle en mouvement

Dans le cas d'une boucle en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$, la force électromotrice totale est donnée par $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{stat}} + \mathcal{E}_{\mathbf{v}}$ avec

$$\mathcal{E}_{\mathbf{v}} = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \left. \frac{d\phi_{\mathbf{B}}}{dt} \right|_{\text{du au mouvement}}$$

La contribution $\mathcal{E}_{\mathbf{v}}$ trouve son origine physique dans la force magnétique qui agit sur les porteurs de charge en mouvement (cas des boucles conductrices).

En utilisant l'identité mathématique

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{\mathbf{v}}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) \cdot \mathbf{n} dS$$

valable pour tout champ vectoriel différentiable $\mathbf{B}$, où $S_{\mathbf{v}}$ (S) est la surface en mouvement (stationnaire), la loi de Faraday prend la forme différentielle

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}$$

valable en tout point de l'espace et à tout instant.

Loi d'induction de Faraday

Analogie Faraday - Ampère

En l'absence de charges électriques ($\rho(\mathbf{r}, t) = 0$), nous avons

$$\begin{array}{ccc}
 \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) & & \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\
 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 & \longleftrightarrow & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \\
 & \text{même forme} &
 \end{array}$$

Le champ électrique induit possède donc, à chaque instant t , la même forme que le champ magnétique qu'aurait généré une distribution de courant de densité $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) / \mu_0$.

Contrairement au cas statique, le champ électrique ne dérive plus simplement d'un potentiel scalaire. Nous avons à présent

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

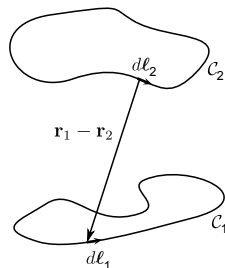
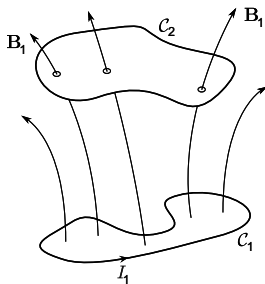
On remarque que si dans le cas statique les phénomènes électriques et magnétiques sont totalement découplés, une dépendance temporelle lie automatiquement et intimement ces deux types de phénomènes.

Inductance

Considérons un circuit C_1 parcouru par un courant constant d'intensité I_1 . Le champ magnétique généré par ce circuit est proportionnel au courant I_1 et il en va de même du flux magnétique au travers d'un second circuit C_2 . On a

$$\phi_2 = M_{21} I_1 \quad \text{où} \quad M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\ell_1 \cdot d\ell_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = M_{12}$$

est appelé coefficient d'induction mutuelle. Ce coefficient, généralement noté M , ne dépend que de la forme et de la position des circuits.



Self-inductance L

Lorsqu'on fait varier l'intensité du courant dans le circuit $\mathcal{C}_1$, le flux magnétique au travers du circuit $\mathcal{C}_2$ varie, donnant naissance à une force électromotrice $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{C}_2$ (d'après la loi de Faraday)

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

Il est clair que ce changement de courant induit également une force électromotrice dans le circuit $\mathcal{C}_1$ lui-même. À nouveau, le champ (et donc le flux) magnétique est proportionnel au courant,

$$\phi = L I \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

où L est appelée la self-inductance du circuit (en V.s.A^{-1} ou H). C'est une quantité intrinsèquement positive qui joue le même rôle dans les circuits électriques que la masse dans les systèmes mécaniques : plus L est grand, plus il est difficile de changer l'intensité du courant de la même manière que plus la masse d'un objet est grande, plus il est difficile d'en changer la vitesse.

Énergie d'une distribution de courants (constants)

Le travail W que nous devons fournir pour augmenter l'intensité du courant dans un circuit (de résistance nulle) est le travail nécessaire pour vaincre la force électromotrice qui apparaît dans le circuit (suite à cette augmentation)

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \frac{dU}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} LI^2 \\ \phi_m &= LI \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{A} \cdot (I d\boldsymbol{\ell})\end{aligned}$$

L'expression pour une distribution volumique de courants s'écrit

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV \quad \text{ou encore} \quad \boxed{U = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} B^2(\mathbf{r}) dV}$$

Interprétation

L'énergie U d'un système de courants (constants) est disséminée dans tout l'espace où règne un champ magnétique avec une densité

$$\boxed{u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(\mathbf{r})}$$

Modification de Maxwell de la loi d'Ampère (1865)

La loi d'Ampère a été établie en étudiant le champ magnétique créé par des courants constants. Elle n'est plus valable pour des courants variables. En effet,

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad \begin{array}{c} \text{Ampère} \\ = \end{array} \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad \begin{array}{c} \text{équation de} \\ \text{continuité} \\ = \end{array} -\mu_0 \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \begin{array}{c} \text{Gauss} \\ = \end{array} -\nabla \cdot \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \neq 0$$

Maxwell proposa, sans justification expérimentale mais en grande partie pour des raisons de symétrie, d'ajouter un terme à la loi d'Ampère qui la rend compatible avec l'équation de continuité. De la même façon qu'un champ magnétique variable induit un champ électrique (Faraday), Maxwell postula qu'un champ électrique variable induit un champ magnétique. Il écrivit

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

La confirmation expérimentale de la théorie de Maxwell dû attendre de nombreuses années, jusqu'à l'observation des ondes électromagnétiques par Hertz en 1887 (après la mort de Maxwell).

Équations de Maxwell dans le vide (1873)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (\text{MW1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{MW2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (\text{MW3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{MW4})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (\text{Lorentz})$$

(MW1) $\equiv$ loi de Gauss

(MW2) $\equiv$ absence de monopôles magnétiques

(MW3) $\equiv$ loi d'induction de Faraday

(MW4) $\equiv$ loi d'Ampère (+ correction de Maxwell)

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

Équations de Maxwell (1873)



Boltzmann (1844–1906)

« Fût-ce un Dieu qui écrivit ces signes ? »



Maxwell (1831–1879)



Max Planck (1858–1947)

"When I began my physical studies and sought advice from my venerable teacher Philipp von Jolly... he portrayed to me physics as a highly developed, almost fully matured science... Possibly in one or another nook there would perhaps be a dust particle or a small bubble to be examined and classified, but the system as a whole stood there fairly secured, and theoretical physics approached visibly that degree of perfection which, for example, geometry has had already for centuries."

Quelques propriétés des équations de Maxwell

- Les équations de Maxwell forment un système d'équations aux dérivées partielles pour les champs du premier ordre par rapport au temps et aux coordonnées spatiales (en ce sens, la “coordonnée temporelle” t et les coordonnées spatiales x, y, z sont traitées sur un pied d'égalité, soulignant le caractère relativiste de ces équations).
- Il convient d'ajouter aux équations de Maxwell des conditions aux limites physiques, en général $\mathbf{E}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{0}$ à grande distance d'une distribution localisée de charges connue.
- Comme toutes les lois de la physique classique, les équations de Maxwell sont déterministes et réversibles. Connaissant les sources $\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ (i.e. en tout point de l'espace et à tout instant) et les champs en tout point de l'espace à un instant donné, les équations de Maxwell permettent de prédire avec certitude l'évolution future ou antérieure des champs.

Quelques propriétés des équations de Maxwell (suite)

- Les équations de Maxwell sont linéaires ($\Rightarrow$ principe de superposition).
 - $\rightarrow$ Si $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ et $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ sont solutions des équations de Maxwell en l'absence de sources ($\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0}$), alors toute combinaison linéaire $(c_1\mathbf{E}_1 + c_2\mathbf{E}_2, c_1\mathbf{B}_1 + c_2\mathbf{B}_2)$ est solution des équations de Maxwell en l'absence de sources.
 - $\rightarrow$ Si $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ et $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ sont solutions des équations de Maxwell pour les sources $(\rho_1, \mathbf{j}_1)$ et $(\rho_2, \mathbf{j}_2)$ respectivement, alors toute combinaison linéaire $(c_1\mathbf{E}_1 + c_2\mathbf{E}_2, c_1\mathbf{B}_1 + c_2\mathbf{B}_2)$ est solution des équations de Maxwell pour les sources $(c_1\rho_1 + c_2\rho_2, c_1\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{j}_2)$.
- Les équations de Maxwell conduisent à la loi de conservation locale de la charge ($\rightarrow$ équation de continuité, voir page 82).
- Les équations de Maxwell conduisent à la loi de conservation de l'énergie totale ($\rightarrow$ théorème de Poynting, voir page 129).
- Les équations de Maxwell sont invariantes par transformations de Lorentz.

Équations de Maxwell sous forme intégrale

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{MW1})$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{MW2})$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{MW3})$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{MW4})$$

Flux de $\mathbf{E}$ au travers d'une surface fermée = (Charge englobée par la surface)/ ϵ_0

Flux de $\mathbf{B}$ au travers d'une surface fermée = 0

Circulation de $\mathbf{E}$ sur une boucle fermée = $-\frac{d}{dt}$ (Flux de $\mathbf{B}$ au travers de la boucle)

Circulation de $\mathbf{B}$ sur une boucle fermée = μ_0 (Courant au travers de la boucle)
 $+\mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}$ (Flux de $\mathbf{E}$ au travers de la boucle)

Arnold Sommerfeld : "The general development of Maxwell's theory must proceed from its differential form ; for special problems the integral form may, however, be more advantageous".

Ensemble de charges ponctuelles en mouvement

À un ensemble de N particules ponctuelles chargées en mouvement [charges q_i , vitesses $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$] correspondent les sources

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$$

Une telle distribution de charges en mouvement est caractérisée par une charge (électrique) totale $Q = \sum_i q_i$, et les moments dipolaires électrique et magnétique

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i(t)$$

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{v}_i(t)$$

Potentiels électromagnétiques

Les champs électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ peuvent s'exprimer à partir des potentiels électromagnétiques $V(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Sous cette forme, les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ satisfont automatiquement aux équations (MW2) et (MW3). Les deux équations de Maxwell restantes sont alors équivalentes aux équations (du second ordre) pour les potentiels V et $\mathbf{A}$,

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j}$$

Ces dernières peuvent être simplifiées en fixant la jauge de manière judicieuse.

Invariance de jauge (locale)

Il est en effet possible d'exécuter une transformation de jauge locale sur le potentiels électromagnétiques qui laisse invariants les champs électrique et magnétique

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\chi \\ V' &= V - \frac{\partial\chi}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} \end{aligned} \right.$$

où $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$ est un champ scalaire quelconque (suffisamment dérivable).

Les potentiels électromagnétiques n'ont pas la même réalité physique que les champs électromagnétiques. Les champs peuvent être déterminés localement par une mesure directe de la force de Lorentz s'exerçant sur des particules chargées, au contraire des potentiels qui ne sont pas définis univoquement à partir des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. Quel est donc l'intérêt de recourir aux potentiels électromagnétiques ? Le fait est que les potentiels sont nécessaires pour pouvoir exprimer les équations du mouvement sous forme lagrangienne (principe d'action stationnaire) ou hamiltonienne. Bien que les phénomènes physiques sont invariants de jauge, le formalisme lagrangien ou hamiltonien requiert leur introduction. De plus, la propriété d'invariance de jauge locale apparaît en physique moderne comme un principe général que doit vérifier toute théorie sensée décrire les interactions fondamentales (électromagnétiques, électrofaibles, fortes, ...).

Jauges de Coulomb et de Lorentz

Il est toujours possible d'effectuer une transformation de jauge de manière à satisfaire à la condition de jauge de Coulomb ou de Lorentz :

<u>Jauge de Coulomb</u>	<u>Jauge de Lorentz</u>
$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$

De plus, les conditions précédentes ne fixent pas totalement la jauge.

La jauge de Coulomb est à privilégier lorsqu'on cherche une interprétation physique cohérente avec les origines des champs dans le problème étudié. Quant à la jauge de Lorentz, elle est adaptée au formalisme relativiste dans lequel $\mathbf{A}$ et V sont traités sur un pied d'égalité.

Jauge de Coulomb

Il est toujours possible d'effectuer une transformation de jauge de manière à satisfaire à la condition de jauge de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\mathbf{A} \text{ transverse})$$

Dans la jauge de Coulomb et en l'absence de sources ($\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0}$),

$$V(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$$

Les champs électrique et magnétique se déduisent uniquement du potentiel vecteur par les relations

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Équations d'ondes

Les équations de Maxwell dans le vide et en l'absence de sources s'écrivent

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \qquad (\mathbf{E} \text{ transverse})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \qquad (\mathbf{B} \text{ transverse})$$

La seconde ligne peut se déduire de la première par la substitution $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}_c$ et $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}/c$. Les équations de Maxwell mènent aux équations d'ondes

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Celles-ci possèdent des solutions dynamiques : les champs électrique et magnétique peuvent avoir une existence indépendante des sources (ex : $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$). Les champs se présentent sous la forme d'ondes vectorielles transverses. Notons que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ obéissent exactement à la même équation.

Ondes électromagnétiques planes

Cherchons des solutions d'ondes planes monochromatiques progressives

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right], \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right]$$

où $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ sont des vecteurs (réels) constants et $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde qui donne à la fois la direction de propagation et la périodicité spatiale de l'onde $\lambda = 2\pi/k$. La fréquence ω donne la périodicité temporelle de l'onde $T = 2\pi/\omega$. Ces ondes planes sont solutions des équations d'ondes à condition que

$$k^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \equiv c$$

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide est donc égale à la vitesse de la lumière dans le vide c quelque soit leur fréquence. En outre, les vecteurs $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ doivent vérifier les relations

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \omega \mathbf{B}_0 = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \quad (\Rightarrow cB_0 = E_0)$$

Les vecteurs $(\mathbf{k}, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ forment un repère droit (ou dextrorsum). Les ondes électromagnétiques planes sont donc des ondes vectorielles transverses (2 polarisations possibles). De plus, la forme des équations de Maxwell impose que les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ soient toujours en phase.

Ondes électromagnétiques



Maxwell (1831–1879)

"We can scarcely avoid the inference that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena."



Hertz (1857–1894)

Hertz did not realize the practical importance of his experiments. He stated that,

"It's of no use whatsoever[...] this is just an experiment that proves Maestro Maxwell was right - we just have these mysterious electromagnetic waves that we cannot see with the naked eye. But they are there."

Asked about the ramifications of his discoveries, Hertz replied, "Nothing, I guess."

Polarisations linéaires et circulaires

Soit une onde électromagnétique plane de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$. Il est commode de considérer des vecteurs $\mathbf{E}_0 = E_0 \boldsymbol{\varepsilon}$ complexes, où $E_0 = |E_0| e^{i\phi}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ est un vecteur polarisation complexe, en se souvenant que les champs réels sont obtenus en prenant la partie réelle des champs complexes.

Onde polarisée linéairement :

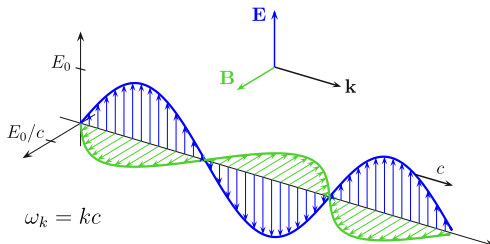
- $\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y$: vecteur polarisation linéaire, réel ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)
et unitaire ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$).
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[E_0 \boldsymbol{\varepsilon} e^{i(kz - \omega t)} \right] = |E_0| \boldsymbol{\varepsilon} \cos(kz - \omega t + \phi)$

Onde polarisée circulairement :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x \pm i \mathbf{e}_y)$: vecteurs polarisations circulaires gauche (+)
et droite (−), complexes et unitaires.
- $\mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[E_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm} e^{i(kz - \omega t)} \right]$
 $= \mp \frac{|E_0|}{\sqrt{2}} [\cos(kz - \omega t + \phi) \mathbf{e}_x \mp \sin(kz - \omega t + \phi) \mathbf{e}_y]$

Onde électromagnétique plane de polarisation linéaire

Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ de l'onde électromagnétique oscillent en phase. Ils sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ qui donne la direction de propagation de l'onde. L'onde est dite polarisée linéairement dans la direction de son champ électrique et le plan $(\mathbf{E}, \mathbf{k})$ est le plan de polarisation. La configuration des champs à un instant donné est illustrée ci-dessous.

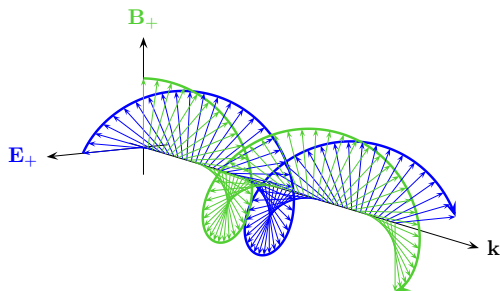


$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \frac{\mathbf{E}_0}{c} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)$$

Les équations de Maxwell expliquent comment ces ondes peuvent se propager physiquement à travers l'espace en l'absence de milieu (d'éther). Le champ magnétique variable crée un champ électrique variable suivant la loi de Faraday. En retour, ce champ électrique crée un champ magnétique variable par le biais de la correction de Maxwell à la loi d'Ampère. Ce cycle perpétuel autorise l'existence d'ondes électromagnétiques qui se propagent à la vitesse de la lumière c .

Onde électromagnétique plane de polarisation circulaire

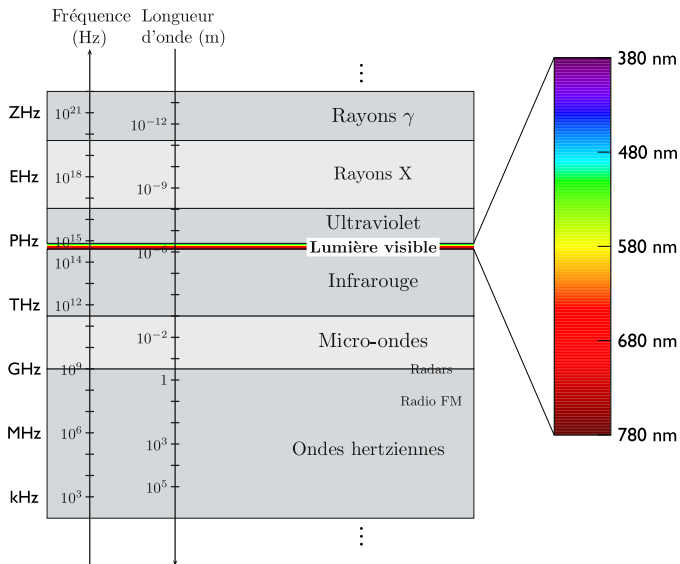
Dans le cas d'une onde électromagnétique de polarisation circulaire gauche (hélicité positive), un observateur fixe faisant face à l'onde incidente voit le vecteur champ électrique tourner dans le sens trigonométrique. La configuration des champs à un instant donné est illustrée ci-dessous.



$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z \Rightarrow \mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) = \frac{|E_0|}{\sqrt{2}} [\sin(kz - \omega t) \mathbf{e}_x + \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_y]$$

$$\mathbf{B}_+(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \frac{\mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t)}{c}$$

Spectre électromagnétique



Potentiels retardés

En jauge de Lorentz, les potentiels électromagnétiques obéissent à des équations d'ondes découplées

$$\begin{aligned}\square^2 V(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \square^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad \text{où } \square^2 \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ est l'opérateur des ondes ou d'Alembertien.}$$

Les solutions physiques (qui respectent la causalité) de ces équations d'ondes sont données par les potentiels retardés

$$\begin{aligned}V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t_r = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t_r = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'\end{aligned}$$

où $t - t_r$ représente le temps que met l'information sur la présence de charges et de courants en $\mathbf{r}'$ à se propager jusqu'en $\mathbf{r}$ à la vitesse de la lumière c .

Théorème de Poynting : conservation de l'énergie

Le théorème de Poynting exprime la conservation de l'énergie totale.

Désignons par $U_{\text{méc}}$ l'énergie mécanique (cinétique, potentielle gravifique, ...) d'un ensemble de particules contenues dans un volume $\mathcal{V}$. Si aucune particule ne sort du volume, nous avons

$$\frac{d(U_{\text{ém}} + U_{\text{méc}})}{dt} = - \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS$$

où $U_{\text{ém}} = U_{\text{ém}}(t)$ représente l'énergie du champ électromagnétique contenu dans le volume $\mathcal{V}$ à l'instant t ($u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t)$ étant la densité d'énergie),

$$U_{\text{ém}}(t) = \int_{\mathcal{V}} u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) dV \quad \text{avec} \quad u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t)}{2} + \frac{B^2(\mathbf{r}, t)}{2\mu_0}$$

et $\mathbf{S}$ est le vecteur de Poynting qui représente l'énergie par unité de temps et par unité de surface transportée par le champ ($[S] = \text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$),

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Conservation de l'impulsion

Désignons par $\mathbf{P}_{\text{méc}}$ l'impulsion mécanique totale d'un ensemble de particules contenues dans un volume $\mathcal{V}$. La conservation de l'impulsion totale (champs + particules) s'écrit (pour la composante $i = x, y, z$)

$$\frac{d(\mathbf{P}_{\text{ém}} + \mathbf{P}_{\text{méc}})_i}{dt} = \int_S \sum_{j=x,y,z} T_{ij} n_j dS$$

où $\mathbf{P}_{\text{ém}} = \mathbf{P}_{\text{ém}}(t)$ représente l'impulsion du champ électromagnétique contenu dans le volume $\mathcal{V}$ à l'instant t ($\mathbf{p}_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t)$ étant la densité d'impulsion),

$$\mathbf{P}_{\text{ém}}(t) = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{p}_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) dV \quad \text{avec} \quad \mathbf{p}_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$$

et où $\mathcal{T}$ est le tenseur des contraintes de Maxwell, de composantes

$$(\mathcal{T})_{ij} \equiv T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

Énergie et impulsion dans les ondes électromagnétiques

Considérons une onde plane progressive, monochromatique et polarisée linéairement se propageant selon Oz (vecteur d'onde $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$, pulsation $\omega_k = kc$),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(kz - \omega_k t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{E}_0}{c} \sin(kz - \omega_k t)$$

- Densité d'énergie électromagnétique

$$u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) = u_e(\mathbf{r}, t) + u_m(\mathbf{r}, t) = 2 u_e(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz - \omega_k t)$$

$$\langle u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T u(\mathbf{r}, t) dt = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \quad (T = 2\pi/\omega_k)$$

- Vecteur de Poynting

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) c \mathbf{e}_z \Rightarrow I(\mathbf{r}) \equiv \langle S(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \quad (\text{intensité})$$

- Densité d'impulsion

$$\mathbf{p}_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) = \frac{u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t)}{c} \mathbf{e}_z \Rightarrow \langle \mathbf{p}_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c} \mathbf{e}_z$$

Ces résultats peuvent s'interpréter en termes de photons (particules de masse nulle se déplaçant à la vitesse de la lumière) d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $(\hbar\omega/c) \mathbf{e}_z$.

Solutions générales des équations de Maxwell

Les champs électrique et magnétique qui sont solutions des équations de Maxwell pour des sources arbitraires $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ se déduisent des potentiels retardés par les relations $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t) - \partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, soit

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}', t_r) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

où, par définition, les champs radiatifs sont les champs transverses qui se comportent en $1/r$ à grande distance,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\partial_t \rho(\mathbf{r}', t_r)}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\partial_t \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' \\ \mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\partial_t \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{c} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV'\end{aligned}$$

Champs radiatifs et rayonnement

Les champs radiatifs sont ces champs qui sont capables de transporter de l'énergie sur des distances arbitraires. La signature d'un rayonnement d'énergie est un flux irréversible d'énergie émanant d'une source. Considérons une source localisée près de l'origine de notre système de coordonnées. Imaginons une sphère de rayon r , beaucoup plus grande que les dimensions de la source. La puissance totale (énergie totale par unité temps) passant au travers de la surface $\mathcal{S}_r$ de la sphère est donnée par l'intégrale du vecteur de Poynting, soit

$$P(r, t) = \int_{\mathcal{S}_r} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{S}_r} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS$$

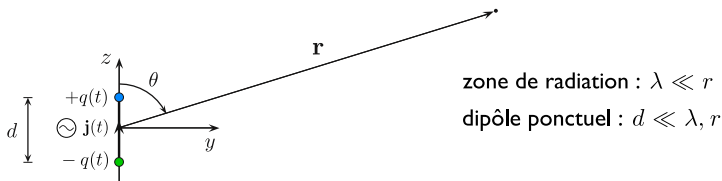
La puissance rayonnée est définie comme la limite de cette quantité lorsque r tend vers l'infini,

$$P_{\text{rad}}(t) \equiv \lim_{r \rightarrow +\infty} P(r, t) \quad (\text{définition})$$

Elle représente l'énergie qui est transportée par les champs par unité de temps à l'infini, et qui ne revient donc jamais. Puisque la surface de la sphère vaut $4\pi r^2$, pour avoir un rayonnement ($P_{\text{rad}} \neq 0$), il faut que le vecteur de Poynting se comporte à grande distance comme $1/r^2$. Les champs (électrique et magnétique) statiques se comportent au mieux comme $1/r^2$ et le vecteur de Poynting au mieux comme $1/r^4$. Les sources statiques ne rayonnent donc pas. En revanche, des champs variables dans le temps (provenant de sources variables dans le temps) possèdent des composantes qui se comportent comme $1/r$ à grande distance. Ce sont ces composantes qui donnent lieu à un rayonnement électromagnétique.

Dipôle électrique oscillant

On considère deux sphères conductrices de taille négligeable reliées entre elles par un fil conducteur parcouru par un courant oscillant. Ce courant est choisi de manière à ce que les sphères portent une charge $\pm q(t) = \pm q_0 \cos(\omega t)$.



Les densités de charge et de courant associées à cette distribution de charges non-stationnaire,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q_0 \cos(\omega t) [\delta(\mathbf{r} - d/2 \mathbf{e}_z) - \delta(\mathbf{r} + d/2 \mathbf{e}_z)]$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -q_0 \omega \sin(\omega t) \delta(x) \delta(y) \theta(d/2 - |z|) \mathbf{e}_z$$

donnent lieu à une charge nulle et un moment dipolaire électrique oscillant

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \cos(\omega t), \quad \mathbf{p}_0 = q_0 d \mathbf{e}_z$$

Dipôle électrique oscillant

À la limite ponctuelle ($d \ll r$, $d \ll c/\omega = \lambda/2\pi$) et à grande distance de la source ($r \gg c/\omega$, zone dite de radiation), les potentiels électromagnétiques sont donnés (en ne retenant que les termes en $1/r$) par

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \simeq -\frac{p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\cos\theta}{r} \sin[\omega(t - r/c)] \sim \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin[\omega(t - r/c)] \mathbf{e}_z \sim \frac{1}{r}$$

Ces potentiels électromagnétiques dépendent du temps retardé $t - r/c$ et donnent, pour cette raison, lieu à des champs radiatifs

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{p_0\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \mathbf{e}_\theta \sim \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)}{c} = -\frac{p_0\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \mathbf{e}_\varphi \sim \frac{1}{r}$$

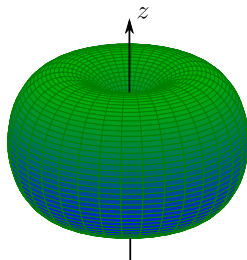
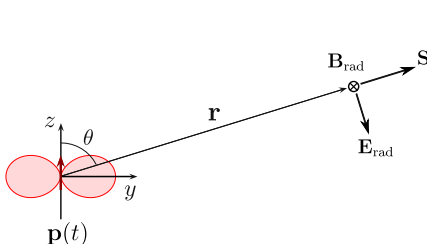
Rayonnement dipolaire électrique : profil d'intensité

Les champs radiatifs représentent des ondes (sphériques) monochromatiques de pulsation ω se propageant dans la direction radiale à la vitesse de la lumière. $\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$ sont en phase, mutuellement perpendiculaires et transverses. Le rapport des amplitudes vaut $E_{\text{rad},0}/B_{\text{rad},0} = c$.

Vecteur de Poynting
(moyenné sur une période)

Puissance rayonnée
(moyennée sur une période)

$$\langle \mathbf{S}_{\text{rad}} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \quad \langle P_{\text{rad}} \rangle = \int_{S_\infty} \langle \mathbf{S}_{\text{rad}} \rangle \cdot \mathbf{n} dS = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$



Rayonnement (dipolaire électrique) par une source arbitraire localisée

Pour une distribution localisée de charges et de courants arbitraires dépendant du temps, les résultats précédents restent valables pourvu que le moment dipolaire électrique de la distribution ne soit pas nul à tout instant. Plus précisément, dans la zone de radiation (loin des sources), les champs radiatifs sont donnés par

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \ddot{\mathbf{p}}(t_r))] = \frac{\ddot{p}(t_r)}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)}{c} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} [\mathbf{e}_r \times \ddot{\mathbf{p}}(t_r)] = \frac{\ddot{p}(t_r)}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{e}_\varphi$$

où $\mathbf{p}(t_r) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t_r) \mathbf{r} dV$ est le moment dipolaire électrique de la distribution de charges évalué au temps retardé $t_r = t - r/c$, et l'axe z est dans la direction de $\ddot{\mathbf{p}}(t_r)$, soit $\ddot{\mathbf{p}}(t_r) = \ddot{p}(t_r) \mathbf{e}_z$.

Le vecteur de Poynting est donné par

$$\mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{[\ddot{p}(t_r)]^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{e}_r$$

et la puissance totale rayonnée vaut

$$P_{\text{rad}}(t) \simeq \frac{[\ddot{p}(t_r)]^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

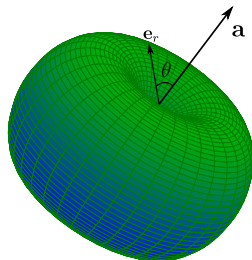
Formule de Larmor (non relativiste)

Toute charge accélérée (ou décélérée) génère un champ de radiation. Le champ émis étant proportionnel à l'accélération, la puissance rayonnée est proportionnelle au carré de l'accélération

$$\mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{e}_r$$

$$P_{\text{rad}} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

Cependant, si les charges subissent juste une translation uniforme, le champ $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ s'annule et il n'y a aucun rayonnement émis. Ceci peut être vu comme une conséquence du principe de relativité restreinte qui stipule que les lois de la physique sont invariantes (ont la même forme) dans tous les référentiels d'inertie (référentiels en MRU les uns par rapport aux autres). Puisque la particule chargée ne rayonne pas dans le référentiel où elle est au repos, elle ne rayonnera pas non plus dans tout autre référentiel inertiel où elle est en MRU.



Champs créés par une charge ponctuelle en MRU

Les champs électrique et magnétique créés par une charge ponctuelle q se déplaçant le long d'une trajectoire rectiligne $\mathbf{R}(t) = (vt, 0, 0)$ à vitesse constante sont donnés par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)|^2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{c}$$

où $\beta = v/c$ et θ' est l'angle entre $\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)}$ et $\mathbf{e}_x$ (direction de propagation).

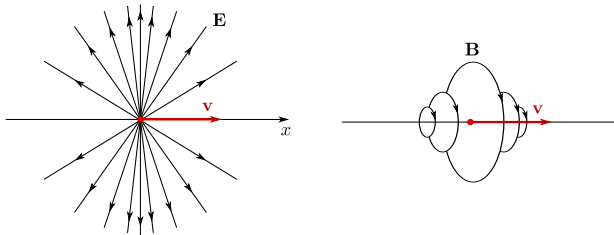
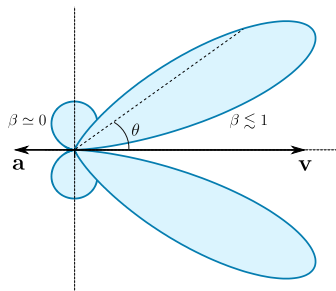


Fig. Lignes de champs électrique et magnétique créés par une particule chargée en mouvement rectiligne uniforme (MRU).

Rayonnements de freinage et synchrotron

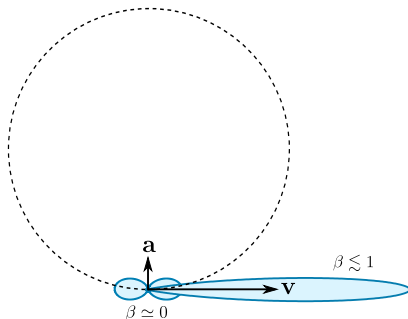
Rayonnement de freinage
Bremsstrahlung
a et **v** colinéaires

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$



Rayonnement synchrotron
a et **v** perpendiculaires

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$



$\beta = v/c$ et θ est l'angle entre **v** et **r**

$\beta \simeq 0$: régime non relativiste, $\beta \lesssim 1$: régime relativiste

Compléments

Équations de Helmholtz

Partons des équations de Maxwell pour les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ en l'absence de sources et cherchons des solutions monochromatiques de pulsation ω ,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) & \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -i\mu_0\epsilon_0 \omega \mathbf{E}(\mathbf{r}) & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \end{array} \right.$$

Ceci nous mène directement aux équations d'Helmholtz (dans le vide)

$$(\Delta + k^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

$$(\Delta + k^2) \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

qui ne possèdent en général de solutions que pour certaines valeurs de $\omega = kc$, appelées fréquences propres. Ces fréquences propres et les modes propres associés (les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$) dépendent en réalité des conditions aux limites imposées aux champs par la géométrie du système et par les propriétés électrique et magnétique de ses frontières (ex : une cavité métallique de forme rectangulaire).

Modes d'une cavité rectangulaire

Dans un conducteur parfait (mouvement libre et instantané des charges sans dissipation), les champs électrique et magnétique sont nuls¹. Seul le champ électrique $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r})$ normal à la surface du conducteur et le champ magnétique $\mathbf{B}_\parallel(\mathbf{r})$ parallèle à la surface peuvent être non nuls (de même que les densités surfaciques de charge $\sigma(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r})$ et de courant $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{B}_\parallel(\mathbf{r})$).

Dans une cavité métallique rectangulaire de cotés L_x, L_y, L_z , nous avons les modes propres

$$E_x(\mathbf{r}) = \sqrt{8/V} \epsilon_x \cos(k_{n_x} x) \sin(k_{n_y} y) \sin(k_{n_z} z)$$

$$E_y(\mathbf{r}) = \sqrt{8/V} \epsilon_y \sin(k_{n_x} x) \cos(k_{n_y} y) \sin(k_{n_z} z)$$

$$E_z(\mathbf{r}) = \sqrt{8/V} \epsilon_z \sin(k_{n_x} x) \sin(k_{n_y} y) \cos(k_{n_z} z)$$

de polarisation $\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$, de vecteur d'onde et de pulsation

$$k_i = n_i \pi / L_i \quad (i = x, y, z, n_i \in \mathbb{N})$$

$$\omega_{n_x, n_y, n_z} = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

1. Plus précisément, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans le matériau conducteur et la troisième équation de Maxwell ($\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$) montre que $\mathbf{B}$ est stationnaire dans le matériau. Si initialement le champ magnétique était nul, il le reste constamment.

Modes TE et TM

La loi de Faraday $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})$ permet d'obtenir le champ magnétique associé

$$B_x(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{8}{V}} (\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{k})_x \sin(k_{n_x} x) \cos(k_{n_y} y) \cos(k_{n_z} z)$$

$$B_y(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{8}{V}} (\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{k})_y \cos(k_{n_x} x) \sin(k_{n_y} y) \cos(k_{n_z} z)$$

$$B_z(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{8}{V}} (\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{k})_z \cos(k_{n_x} x) \cos(k_{n_y} y) \sin(k_{n_z} z)$$

Les modes TE (transverse électrique) correspondent à un champ électrique dont la composante E_z est nulle ($\epsilon_z = 0$).

Les modes TM (transverse magnétique) correspondent à un champ magnétique dont la composante B_z est nulle ($(\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{k})_z = 0$).

Dipôle électrique ponctuel oscillant

À la limite ponctuelle ($d \ll r$, $d \ll c/\omega = \lambda/2\pi$), les champs émis par un dipôle oscillant de moment $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \cos(\omega t) = \Re[\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}]$ sont donnés par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ \left(k^2 + \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{p}(t) - \left(k^2 + \frac{3ik}{r} - \frac{3}{r^2} \right) (\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r \right\} \right]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(k^2 + \frac{ik}{r} \right) \mathbf{e}_r \times \mathbf{p}(t) \right]$$

A courte distance ($r \ll \lambda$, $kr \ll 1$), nous retrouvons le champ électrostatique créé par une dipôle ponctuel et la loi de Biot-Savart pour le champ magnétique créé par un courant de densité $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(t)\delta(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{p}}(t)\delta(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{e}_r}{r^3} \mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{p}(t)}{r^3} \right)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{j}}(t) \times \mathbf{r}}{r^3}$$

tandis qu'à grande distance ($r \gg \lambda$, $kr \gg 1$), nous retrouvons les champs radiatifs (voir page 137).

Théorème de Wing (I)

Dans une région dépourvue de charges et de courants, l'intensité d'un champ statique, électrique ou magnétique, peut présenter des minima locaux mais pas de maxima locaux

Maxima :

En effet, supposons qu'un maximum de $|\mathbf{C}|$ existe ($\mathbf{C} = \mathbf{E}$ ou $\mathbf{B}$). Dans un système de coordonnées où le maximum est à l'origine, nous pouvons écrire

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}(0) + \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) \quad \text{et} \quad C^2(\mathbf{r}) = C^2(0) + \delta C^2(\mathbf{r}) + 2\mathbf{C}(0) \cdot \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r}$$

avec $\delta\mathbf{C}(0) = 0$. Les deux premiers termes de C^2 sont positifs. Pour que $C^2(0)$ soit un maximum, nous devons avoir $\mathbf{C}(0) \cdot \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) < 0 \quad \forall \mathbf{r}$ aux alentours de $\mathbf{r} = 0$. En prenant l'axe z le long de $\mathbf{C}(0)$, nous obtenons $\mathbf{C}(0) \cdot \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) = C_z(0)\delta C_z(\mathbf{r})$ avec $C_z(0) > 0$ et la condition précédente devient $\delta C_z(\mathbf{r}) < 0 \quad \forall \mathbf{r}$ aux alentours de $\mathbf{r} = 0$. Par ailleurs, en régime statique, nous avons

$$0 = \nabla \times \underbrace{(\nabla \times \mathbf{C})}_{=0} = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{C})}_{=0} - \Delta \mathbf{C} = -\Delta \mathbf{C} = -(\Delta \delta C_x, \Delta \delta C_y, \Delta \delta C_z)$$

Mais si δC_z vérifie l'équation de Laplace, sa valeur à l'origine (0) doit être égale à sa valeur moyenne sur une sphère centrée sur l'origine. Dès lors, la condition $\delta C_z(\mathbf{r}) < 0 \quad \forall \mathbf{r}$ aux alentours de $\mathbf{r} = 0$ ne peut être satisfaite et $|\mathbf{C}|$ ne peut avoir de maxima.

Théorème de Wing (II)

Minima :

Si un minimum de $|\mathbf{C}|$ existe à l'origine, alors, hormis le cas trivial $\mathbf{C} = \text{const}$, nous devons avoir

$$\delta C^2(\mathbf{r}) + 2 \mathbf{C}(0) \cdot \delta \mathbf{C}(\mathbf{r}) > 0 \quad \forall \mathbf{r} \text{ proche de } \mathbf{r} = 0$$

D'après la discussion sur les maxima, $\mathbf{C}(0) \cdot \delta \mathbf{C}(\mathbf{r})$, s'il est non-nul, ne peut garder le même signe en tout point proche de l'origine. Par conséquent, une manière de satisfaire la condition précédente est d'avoir $\mathbf{C}(0) \cdot \delta \mathbf{C}(\mathbf{r}) = 0$ (comme c'est le cas par exemple lorsque $\mathbf{C}(0) = 0$).

Exemple :

Le champ quadrupolaire $\mathbf{C} = c_x x \mathbf{e}_x + c_y y \mathbf{e}_y + c_z z \mathbf{e}_z$ avec $c_x + c_y + c_z = 0$ (afin de vérifier $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0$) présente un minimum d'intensité à l'origine.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

La force que subit une particule (relativiste ou non) de charge q et de vitesse $\mathbf{v}$ plongée dans un champ électromagnétique a pour expression

$$\mathbf{F}_L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (\text{force de Lorentz})$$

Les équations du mouvement, qui déterminent l'évolution temporelle de la position de la particule $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, sont les équations de Newton. Dans le régime non-relativiste, celles-ci s'écrivent

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}_L(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (2\text{e loi de Newton})$$

avec

$$\mathbf{p}(t) = m_0 \mathbf{v}(t) \quad (\text{quantité de mouvement})$$

où m_0 est la masse au repos de la particule, soit

$$\ddot{x}(t) = \frac{q}{m_0} [E_x(\mathbf{r}(t), t) + \dot{y}(t)B_z(\mathbf{r}(t), t) - \dot{z}(t)B_y(\mathbf{r}(t), t)]$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{q}{m_0} [E_y(\mathbf{r}(t), t) + \dot{z}(t)B_x(\mathbf{r}(t), t) - \dot{x}(t)B_z(\mathbf{r}(t), t)]$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{q}{m_0} [E_z(\mathbf{r}(t), t) + \dot{x}(t)B_y(\mathbf{r}(t), t) - \dot{y}(t)B_x(\mathbf{r}(t), t)]$$

Mouvement dans un champ magnétique homogène

En l'absence de champ électrique et en présence d'un champ magnétique homogène $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$, la force de Lorentz est, à tout instant, orthogonale à $\mathbf{e}_z$ et les équations du mouvement se réduisent à

$$\ddot{x}(t) = \frac{qB_0}{m_0} \dot{y}(t), \quad \ddot{y}(t) = -\frac{qB_0}{m_0} \dot{x}(t), \quad \ddot{z}(t) = 0$$

Ces équations admettent comme solution générale

$$x(t) = x_0 + R \cos(\omega_c t + \varphi)$$

$$y(t) = y_0 + R \sin(\omega_c t + \varphi)$$

$$z(t) = z_0 + v_z t$$

avec $\omega_c = qB_0/m_0$. La quantité positive $|\omega_c| = \frac{|qB_0|}{m_0}$ est appelée pulsation cyclotron. Le mouvement global est la composition d'un MRU dans la direction du champ magnétique et d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan orthogonal au champ magnétique. La trajectoire est une hélice de pas $h = v_z(2\pi/\omega_c)$. Comme le travail de la force magnétique est nul, l'énergie cinétique de la particule est conservée.

Formulation lagrangienne

Les équations du mouvement s'écrivent sous forme Lagrangienne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (q_i = x, y, z)$$

avec le Lagrangien (dans le régime non-relativiste)

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{1}{2} m_0 v^2 - \underbrace{q[V(\mathbf{r}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}]}_{\text{potentiel généralisé}}$$

où $V(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ sont les potentiels scalaire et vecteur dont dérive le champ électromagnétique.

Tout se passe comme si la particule chargée ressentait à chaque instant t le potentiel $q[V(\mathbf{r}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}(t)]$. Bien que le lagrangien dépende explicitement des potentiels électromagnétiques, et donc du choix de la jauge, les équations du mouvement, elles, n'en dépendent pas. Un changement de jauge correspond à ajouter au Lagrangien la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction.

Formulation hamiltonienne

Les équations du mouvement s'écrivent sous forme Hamiltonienne

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

où p_i sont les impulsions canoniquement conjuguées aux coordonnées q_i (ou impulsions canoniques)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_0 v_i + q A_i \quad (q_i = x, y, z)$$

Celles-ci doivent être distinguées des composantes de la quantité de mouvement (ou impulsions mécaniques) $m_0 v_i = p_i - q A_i$. L'hamiltonien dans le régime non-relativiste a pour expression

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2m_0} + qV(\mathbf{r}, t)$$

où le premier terme représente l'énergie cinétique $K = m_0 v^2/2$ de la particule chargée plongée dans le champ électromagnétique et le second terme son énergie potentielle (définie à une constante additive près).